José António da Silva Fernandes

INTUIÇÕES E APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADES

Uma Proposta de Ensino de Probabilidades no 9º Ano de Escolaridade

Tese de Doutoramento em Educação

(Área do conhecimento de Metodologia do Ensino da Matemática)

sob a orientação da Doutora Conceição Almeida

da Universidade do Minho

Universidade do Minho

BRAGA, 1999

AGRADECIMENTOS

À Doutora Conceição Almeida pelo apoio prestado na orientação deste trabalho. As suas sugestões, críticas e a confiança que depositou no meu trabalho foram contribuições importantes para a sua realização.

Ao Doutor Manuel Cuiça Sequeira, Director do Departamento de Metodologias da Educação, pelo apoio e incentivo dados à realização deste trabalho.

Ao Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho pelas facilidades concedidas na utilização dos seus serviços.

Ao Fundo Social Europeu por ter suportado os encargos financeiros com o docente que me substituiu durante o período de equiparação a bolseiro e com a aquisição de alguma bibliografia e material consumível.

Ao Centro de Estudos em Educação e Psicologia da Universidade do Minho pelo apoio financeiro concedido à realização deste trabalho.

Às Doutoras Conceição Duarte e Laurinda Leite pela sua disponibilidade em ouvirem e esclarecerem as minhas dúvidas e por visionarem os questionários usados na investigação. Ao Doutor Pedro Oliveira agradeço igualmente a sua participação na avaliação dos questionários.

À Dra. Maria Margarida Constantino e ao Mestre Melo Alves pela sua contribuição na avaliação dos questionários usados no estudo.

Aos Conselhos Directivos das Escolas Secundária de Sá de Miranda, Secundária Carlos Amarante, Secundária Alberto Sampaio, Secundária de Maximinos, Básica 2, 3 de Gualtar, Básica 2, 3 Dr. Francisco Sanches e aos Directores Pedagógicos dos Colégios Teresiano e D. Diogo de Sousa pelas facilidades que me concederam na aplicação dos questionários aos alunos.

Aos professores de Matemática, ao professor de Educação Física e à professora de Português das turmas em que foram aplicados os questionários por disponibilizarem o tempo das suas aulas e colaborarem na aplicação dos questionários.

Ao Conselho Directivo da Escola Básica 2, 3 Dr. Francisco Sanches por ter permitido a realização na sua escola de um dos estudos e pela disponibilidade que sempre manifestou para ultrapassar dificuldades surgidas.

Ao grupo de Matemática do 3º ciclo da Escola Básica 2, 3 Dr. Francisco Sanches, e de modo particular à Dra. Maria José Dias, à Dra. Guiomar e à Dra. Paula Viamonte pela sua participação no estudo. À Dra. Maria José Dias agradeço ainda o ter facilitado o meu relacionamento na escola e o apoio nas mais variadas tarefas logísticas.

Por fim, aos alunos que participaram no estudo, sem os quais não teria sido possível realizar este trabalho.

RESUMO

A investigação realizada compõe-se de dois estudos: (1) um primeiro 'Estudo sobre intuições probabilísticas', em que se identificaram e caracterizaram intuições probabilísticas de alunos do 8º ano e do 11º ano, e (2) um segundo 'Estudo sobre o ensino de probabilidades', em que se concebeu, implementou e avaliou uma experiência de ensino contemplando as intuições probabilísticas em alunos do 9º ano, por comparação com um ensino tradicional.

No primeiro estudo, formularam-se as três seguintes questões de investigação:

1. Que intuições probabilísticas possuem alunos do 8º ano de escolaridade comparativamente com alunos do 11º ano de escolaridade?

2. Há diferenças nas respostas correctas em relação às variáveis ano escolar, desempenho em matemática, sexo, ensino de probabilidades e interpretação do conceito de probabilidade, entre alunos do 8º ano e/ou do 11º ano de escolaridade?

3. Há diferenças na confiança nas respostas, em relação às variáveis ano escolar, desempenho em matemática, sexo e ensino de probabilidades, entre alunos do 8º ano e/ou do 11º ano de escolaridade?

Tendo por referência estas questões de investigação, verificou-se que os alunos de ambos os anos escolares revelaram intuições mais limitadas e primitivas nas probabilidades em experiências compostas (*e.g.*, lançar dois dados, três moedas ou extrair duas bolas) do que nas probabilidades em experiências simples (*e.g.*, lançar um dado, uma moeda ou extrair uma bola). Além disso, as elevadas percentagens de respostas correctas obtidas na classificação de acontecimentos em certos, possíveis e impossíveis, sugerem que os alunos possuem intuições correctas sobre esta classificação de acontecimentos. Neste último caso, os alunos revelaram mais dificuldades nos acontecimentos certos e/ou que envolviam os conectivos *e*, *ou* e *não*.

Entre os alunos dos dois anos escolares, os alunos do 8º ano justificaram mais frequentemente as suas respostas a partir de comparações baseadas em contagens e no facto de os acontecimentos serem possíveis, e quase nunca referiram 'raciocínios gerais' (raciocínios que garantem a escolha da resposta correcta). Já no caso dos alunos do 11º ano, uma percentagem considerável de alunos referiram 'raciocínios gerais', nas experiências compostas recorreram a probabilidades das experiências simples envolvidas e menos frequentemente referiram-se ao facto de os acontecimentos serem possíveis. Entre os alunos do 11º ano, o ensino de probabilidades, por que alguns destes alunos tinham passado no 9º ano, favoreceu a adesão a 'raciocínios gerais' nas experiências simples e não se salientou qualquer impacto nas experiências compostas.

O número de respostas correctas aumentou do 8º ano para o 11º ano e com o desempenho em matemática, em ambos os anos escolares. No 8º ano observou-se uma tendência para os alunos do sexo masculino seleccionarem mais frequentemente as respostas correctas, o que se acentuou no 11º ano. Entre os alunos do 8º ano, a

interpretação frequencista de probabilidade favoreceu a selecção das respostas correctas, essencialmente nas experiências compostas, em relação à interpretação clássica de probabilidade. Já entre os alunos do 11º ano, o ensino de probabilidades não produziu um efeito significativo na escolha das respostas correctas.

Comparativamente com os alunos do 11º ano, os alunos do 8º ano depositaram uma maior confiança nas suas respostas e, em ambos os anos escolares, os alunos depositaram uma maior confiança nas respostas correctas do que nas respostas erradas. Também em ambos os anos escolares, a confiança nas respostas correctas aumentou com o desempenho em matemática e observou-se que os alunos do sexo masculino depositaram uma maior confiança nas respostas, mais acentuada entre os alunos do 11º ano.

No segundo estudo, formulou-se a seguinte questão de investigação:

4. No 9º ano de escolaridade, um tipo de ensino que considere as ideias intuitivas dos alunos tem um maior impacto na aprendizagem de probabilidades, comparativamente com um ensino tradicional, no que respeita às intuições, às respostas correctas e ao cálculo de probabilidades?

Ao nível das intuições probabilísticas, salienta-se o impacto das duas estratégias de ensino na maior adesão a ‘raciocínios gerais’, praticamente não referidos pelos alunos antes de ensino, e na menor adesão a comparações baseadas em contagens, à causalidade e ao facto de os acontecimentos serem possíveis. Comparativamente com a estratégia de ensino tradicional, a estratégia que contemplou as intuições teve um maior impacto na adopção de ‘raciocínios gerais’ e na diminuição da adesão a comparações baseadas em contagens e na referência ao facto de os acontecimentos serem possíveis.

Entre as duas estratégias de ensino, a estratégia experimental favoreceu a selecção das respostas correctas e a realização dos alunos em cálculo de probabilidades, neste último caso, essencialmente nas probabilidades em experiências compostas. Em ambas as estratégias de ensino, tanto nas respostas correctas como no cálculo de probabilidades, a realização dos alunos aumentou com o desempenho em matemática.

A estratégia de ensino experimental produziu resultados mais equilibrados em relação às variáveis desempenho em matemática, considerando as respostas correctas, e sexo, considerando as respostas correctas e o cálculo de probabilidades. Na condição de ensino experimental os alunos de desempenho médio e elevado progrediram de forma semelhante e mais do que os alunos de baixo desempenho, as diferenças nas respostas correctas, favoráveis ao sexo masculino e observadas antes de ensino, desapareceram depois de ensino e não se observaram diferenças entre os sexos na realização em cálculo de probabilidades. Na condição de ensino tradicional, observou-se um progresso crescente com o melhor desempenho em matemática, não se observaram diferenças nas respostas correctas entre os sexos depois de ensino, tal como tinha acontecido antes de ensino, e os alunos do sexo feminino obtiveram uma melhor realização em cálculo de probabilidades.

ÍNDICE

CAPÍTULO III – METODOLOGIA

CAPÍTULO IV – RESULTADOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

C A P Í T U L O I

INTRODUÇÃO

1.1. Evolução recente do ensino da estocástica

Com a introdução da chamada Matemática Moderna, a estocástica começou a fazer parte integrante dos currículos de matemática em muitos países europeus. Neste contexto, segundo Borovcnik (1991), as probabilidades constituíam uma boa oportunidade para aplicar a teoria de conjuntos e a lógica. A combinatória assumia-se como o principal meio de calcular probabilidades e muitos problemas envolviam a enumeração de casos numa situação combinatória intrincada. A estatística desempenhava um papel menor, ou não tinha mesmo qualquer papel.

Com o declínio da Matemática Moderna, reafirmou-se o papel das aplicações e a estatística descritiva e inferencial aumentaram de importância. No entanto, as aplicações não eram ensinadas como exemplos pragmáticos para mostrar que a matemática ajuda a organizar a realidade, nem o desenvolvimento de *skills* envolvidos na aplicação estava no centro do esforço de ensino. A ênfase era colocada no ensino de algo como construção de modelos. Matematizar, generalizar, especificar, estabelecer assunções especiais, estabelecer um modelo adequado para o problema e interpretar os resultados fornecidos pelo modelo eram objectivos que apoiavam o movimento das aplicações, que se seguiu à Matemática Moderna. Embora as aplicações constituíssem exemplos, o que era mais importante não era resolver o problema particular mas aprender o processo geral de matematização (Borovcnik, 1991).

Ainda nesta perspectiva das aplicações, a simulação foi usada em dois sentidos diferentes: em primeiro lugar, como forma de reduzir a análise complexa da situação e, em segundo lugar, para dar sentido concreto aos métodos inferenciais, reforçando-se a interpretação frequencista de probabilidade.

Seguidamente, as propostas que foram surgindo combinaram um novo estilo de trabalho com a estatística, nomeadamente projectos. Nestes projectos os alunos recolhem os seus próprios dados, analisam-nos e elaboram relatórios escritos (Hogg, 1992).

Em relação à Áustria, segundo Borovcnik (1991), até 1970 faziam parte do currículo escolar a combinatória, que em seguida era aplicada ao cálculo de probabilidades. Em consequência, esta abordagem assentava basicamente no cálculo combinatório e no conceito de probabilidade de Laplace. Em 1980, verificaram-se alterações importantes resultantes da introdução de probabilidades e de inferência estatística com uma pequena parte de estatística descritiva nos dois últimos anos do ensino secundário. Finalmente, em 1989 o currículo foi de novo revisto. Agora, a estatística descritiva, incluindo a exploração e análise de dados, passou a ser abordada mais cedo, na idade dos 10 aos 14 anos, e mais profundamente pela idade dos 15 anos.

Segundo Borovcnik (1991), o desenvolvimento do ensino das probabilidades e estatística na Alemanha foi semelhante, mas começou 10 anos mais cedo e diferiu um pouco de estado para estado. Neste caso, salientam-se mais análises de jogos simples, mais estudo de probabilidades elementares nas idades dos 10 aos 14 anos e uma escolha de conteúdos especiais na idade dos 17 anos. Além disso, cursos avançados incluíam muitos tópicos de estatística introdutória a um nível universitário.

Para Borovcnik (1991) há uma abordagem diferente na tradição alemã comparativamente com a britânica. Segundo este autor, a preferência por conceitos teóricos altamente estruturados pode ter a sua origem na complexidade da língua alemã. As aplicações são menos consideradas do que a teoria, e a perspectiva pragmática das aplicações é ainda menos apreciada. Durante os últimos 20 anos acentuou-se o estudo das probabilidades, muito embora a situação esteja a mudar. Partindo do estudo das probabilidades com base na combinatória, desenvolveu-se posteriormente a sua ligação à perspectiva axiomática e à lógica, estruturando-se e organizando-se o caos através da matematização. Nesta matematização, era suposto que a relação entre a estrutura matemática final (teoremas deduzidos a partir dos axiomas) e as várias interpretações dos conceitos usados devia desempenhar um papel importante.

Todo o percurso referido pode ser resumido como um destaque sobre o desenvolvimento da teoria de probabilidades, sobre os conceitos e sobre a sua relação com a realidade.

Considerando que "o 'pensamento estocástico' é uma forma peculiar, diferente do pensamento usual, desenvolvido através de partes de processos matemáticos de probabilidade para clarificar a matéria" (Borovcnik, 1991, p. 87), conclui-se que o pensamento estocástico é um lema que está mais presente nesta abordagem, e é mais popular nos países de língua alemã do que na Inglaterra ou nos Estados Unidos.

O lema *statistical literacy for all* tem tido impacto apenas recentemente. Agora, técnicas descritivas e exploratórias são introduzidas no início do ensino secundário quando as exigências matemáticas o permitem. Neste contexto, Pestana (1998) destaca a importância da capacidade de 'ler números', sob a forma tabular ou qualquer outra codificação, no sentido de extrair deles a informação que eles contêm.

Em Inglaterra, as deficiências do ensino da estatística, apontadas pelos profissionais da estatística nos primeiros anos da década de 70, estiveram na origem do desenvolvimento do projecto *Schools Council Project on Statistical Education* (Holmes & Turner, 1981). O projecto tinha como alvo o ensino da estatística a todos os alunos dos 11 aos 16 anos, enquanto parte da sua educação geral. O ensino, centrado numa estratégia de resolução de problemas e no desenvolvimento de conceitos e técnicas em contextos práticos, organizou-se em quatro níveis. Nos dois primeiros níveis, preparavam-se as bases para a compreensão das probabilidades e para o uso de técnicas estatísticas, recorrendo-se frequentemente a representações gráficas. No terceiro e quarto níveis, os alunos tratavam a maior parte das técnicas elementares de estatística e aplicavam-nas a contextos variados, como geografia, economia e ciências sociais. Especificamente, nestes níveis recorria-se a simulações e estudava-se o efeito do acaso em situações várias.

Diferentemente, nos Estados Unidos a estocástica ainda não constitui um hábito do ensino da matemática (Shaughnessy, 1992). Presentemente, muito pouca estatística é ensinada aos alunos antes de entrarem no ensino superior. Ao nível do ensino secundário, verifica-se que muito poucas escolas americanas oferecem actualmente um curso separado em probabilidades e estatística. Em alternativa, os alunos poderão frequentar uma unidade de seis a nove semanas incluída noutra disciplina. Em qualquer caso, muitos alunos não tratarão o tema e os professores serão tentados a não leccioná-lo.

A este propósito, Watkins, Burrill, Landwehr e Scheaffer (1992) referem que um estudo realizado em 1987 nas escolas do estado de Ohio revelou que apenas aproximadamente um quinto dessas escolas ofereciam um curso separado em probabilidades e estatística, e, destes, 25% não contemplavam qualquer estudo de estatística inferencial. Além disso, verificou-se que três quartos das escolas ensinavam alguma estatística e probabilidades em cursos de matemática. Tipicamente, a estatística descritiva fazia parte de algum curso de matemática geral e alguns temas de probabilidades eram ensinadas no segundo ano do curso de álgebra ou em pré-cálculo.

Há, todavia, um movimento vigoroso e crescente no sentido de introduzir elementos de estocástica no currículo do ensino secundário, e mesmo no currículo do ensino básico, como parte da literacia básica em matemática (Garfield & Ahlgren, 1988). É assim que instituições prestigiadas, como o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) e a *American Statistical Association* (ASA), têm dedicado a esta temática publicações importantes.

Em relação aos níveis da escolaridade básica, até muito recentemente, pode afirmar-se com segurança que não existia qualquer ensino de probabilidades e estatística. Contudo, nos últimos quatro ou cinco anos a situação tem vindo a alterar-se. Para tal, têm contribuído a implementação de projectos, como, por exemplo, o *Quantitative Literacy Project* (Gnanadesikan, Scheaffer & Swift, 1987; Landewehr & Watkins, 1986; Landewehr & Watkins & Swift, 1987; Newman, Obremski & Scheaffer, 1987) e o

Middle Grades Mathematics Project (Phillips, Lappan, Winter & Fitzgerald, 1986), que têm feito incursões no ensino deste tema ao nível do 3º ciclo do ensino básico.

A Hungria constitui uma excepção no que respeita ao ensino da estocástica ao nível da escolaridade básica. Os programas escolares de matemática, estabelecidos em 1974/75 e que começaram a ser introduzidos gradualmente nas escolas primárias, contemplavam já temas de estocástica. Especificamente, em todos os anos da escolaridade obrigatória (do 1º ao 8º ano de escolaridade) faziam parte dos respectivos programas de matemática itens de estocástica (Szendrei, 1990). Em termos de abordagem, destaca-se uma introdução dos termos e conceitos estocásticos a partir de jogos, especialmente nos primeiros anos de escolaridade, e o propósito de utilizar actividades estocásticas para desenvolver outras competências nos alunos. Assim, para além de relações entre as probabilidades e a estatística, salienta-se a promoção de competências de cálculo e a introdução do conceito de função (Szendrei, 1990).

A não existência de materiais didácticos para o ensino da estocástica terá também condicionado o seu ensino (Shaughnessy, 1992; Watkins, Burrill, Landwehr & Scheaffer, 1992). Também, neste caso, a publicação de materiais no âmbito de vários projectos constitui um incentivo da maior importância para o ensino efectivo da estocástica. Assim, para além de acções de formação, os professores dispõem, agora, de materiais concebidos com a sua ajuda e testados nas salas de aula (Watkins, Burrill, Landwehr & Scheaffer, 1992). Para além das publicações dos projectos referidos antes, são de destacar as publicações *Teaching Statistics and Probability* (Shulte, 1981) e *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1991), do National Council of Teachers of Mathematics, e *Statistics for the Twenty-First Century* (Gordon & Gordon, 1992), da Mathematical Association of America.

Tal como nos Estados Unidos, também na Europa têm surgido publicações neste domínio, como, por exemplo, *Les Probabilités à l'École* (Glaymann & Varga, 1975), *Azar y Probabilidad. Fundamentos Didácticos y Propuestas Curriculares* (Godino, Batanero & Canizares, 1987) e a revista inglesa *Teaching Statistics*.

A estocástica como disciplina científica é usualmente ensinada pela primeira vez ao nível do ensino superior. O curso introdutório é, em geral, constituído por três áreas, na sequencialização: (1) estatística descritiva, (2) teoria de probabilidades e (3) estatística inferencial (Borovcnik, 1985). Usualmente, estes cursos, propostos uma década atrás, baseavam-se em regras e em receitas-tipo para o cálculo em estatística ou em introduções muito matematizadas, no caso da estatística baseada em probabilidades. A este nível de ensino, os estudantes pareciam ser capazes de memorizar fórmulas e algoritmos para resolver problemas que lhes eram familiares e bem definidos (Garfield & Ahlgren, 1988). Contudo, raramente possuíam um sentido claro do racional envolvido, exibiam dificuldades em descortinar a aplicabilidade do conteúdo e não existiam praticamente possibilidades de aperfeiçoar as suas intuições estatísticas (Shaughnessy, 1992). Também, ao nível do ensino superior, as recomendações surgidas nas várias realizações da *International Conference on Teaching Statistics* (Davidson & Swift, 1988; Grey, Holmes, Barnett & Constable, 1983; Vere-Jones, 1991) têm contribuído lentamente para alterar a maneira de ensinar estocástica.

Garfield e Ahlgren (1988) referem-se à necessidade de basear o ensino da estatística na resolução de problemas, destacando o uso de dados reais e a introdução dos conceitos estatísticos na medida em que vão sendo necessários. Shaughnessy (1992) reconhece que os impedimentos de uma implementação efectiva da resolução de problemas nas nossas escolas sejam os mesmos que obstruem um ensino efectivo das probabilidades e estatística. A este respeito, o ensino da estocástica é ensino de resolução de problemas num domínio de conteúdo mais restrito, pois envolve a construção de modelos de fenómenos físicos, o desenvolvimento e construção de estratégias (estratégias de simulação e de contagem) e a comparação e avaliação de várias abordagens diferentes aos problemas em ordem a monitorar possíveis concepções e representações erradas. Além disso, são ambas áreas relativamente novas em matemática e os *backgrounds* dos professores são muito limitados ou não existentes.

Actualmente, as divergências no ensino da estocástica, mais centrada no ensino das probabilidades na Europa Continental e baseada na estatística e na análise de dados nos países anglo-saxónicos, têm diminuído. Segundo Borovcnik e Peard (1996), actualmente, parece haver alguma convergência em relação ao seu ensino.

No caso português, a questão do ensino da estatística e das probabilidades tem seguido aproximadamente a tradição europeia, talvez com algum atraso em relação a outros países. À semelhança de outros países europeus, o ensino da matemática em Portugal foi largamente influenciado pelas ideias do Movimento das Matemáticas Modernas, a partir de meados da década de 60. É por esta altura que se inicia o estudo da matemática moderna nas turmas experimentais do ensino liceal, sob a orientação de Sebastião e Silva, e ligeiramente mais tarde no ensino técnico, sob a égide de Santos Heitor (Matos, 1989). Por esta altura, a estocástica era já um dos temas do *Compêndio de Matemática – Projecto de modernização do ensino da matemática no 3º ciclo liceal* da autoria de Sebastião e Silva (1964).

Durante todo o período, que se prolongou até à reforma educativa dos anos 90, os programas escolares do ensino da matemática mantiveram-se praticamente inalterados. As propostas de ensino de Sebastião e Silva, apresentadas nos seus *Compêndios de Matemática* (Sebastião e Silva, 1975) e respectivos *Guias para a Utilização do Compêndio de Matemática* (Sebastião e Silva, 1975, 1977), continuaram a influenciar decisivamente o ensino da matemática em Portugal, as quais são ainda explícitas nos programas actuais do ensino secundário (Ministério da Educação, 1997).

Especificamente, no âmbito da estatística e probabilidades, o programa da disciplina de Matemática das áreas científico-naturais de 1979/80 incluía no 11º ano de escolaridade tópicos de cálculo combinatório e de introdução à estatística e às probabilidades. Em termos de sequencialização, começava-se por estudar técnicas de contagem que posteriormente eram aplicadas ao cálculo de probabilidades. No caso das probabilidades, partia-se da representação através de conjuntos e prosseguia-se com uma referência à frequência relativa, à axiomatização do conceito de probabilidade e à definição de probabilidade de Laplace (Ministério da Educação e Cultura, 1979a). Todavia, porque estes tópicos eram os últimos do programa, eles muito frequentemente não eram leccionados. Esta prática de não leccionar estes temas é confirmada pela sua eliminação do programa mínimo da disciplina de Matemática do ano lectivo de 1980/81 (Ministério da Educação e Investigação Científica, 1980).

Estes mesmos temas fizeram também parte do programa da disciplina de Matemática do 10º ano do curso de Humanísticas, embora com um menor desenvolvimento (Ministério da Educação e Cultura, 1979b). Contudo, aqui a situação era ainda pior, pois, tratando-se de uma disciplina de opção, ela não era escolhida pela generalidade dos alunos. Também com o aumento da escolarização até ao 12º ano, verificou-se que a disciplina de Matemática dos cursos científico-naturais manteve um carácter estrutural, não contemplando qualquer tema de estocástica (Ministério da Educação e Ciência, 1980).

Em conclusão, até à implementação dos novos programas da disciplina de Matemática no início da década de 90, resultado da última reforma educativa, constata-se que o ensino da estocástica na escola foi irrelevante ou muito reduzido. A situação alterou-se substancialmente com a introdução destes novos programas.

No caso do ensino secundário, cuja generalização do programa ocorreu no ano lectivo de 1993/94, verifica-se que as probabilidades e a estatística constituem um tema que se desenvolve ao longo de cada um dos três anos de escolaridade (Ministério da Educação, 1992). Mais concretamente, no 10º ano abordam-se tópicos de estatística descritiva; no 11º ano tratam-se questões de probabilidades e estatística, especificamente, aspectos conjuntistas e axiomáticos do conceito de probabilidade, definição clássica e frequencista de probabilidade e distribuições de frequências relativas e de probabilidades, com referência à curva normal; finalmente, no 12º ano estuda-se a combinatória e a sua aplicação ao cálculo de probabilidades, incluindo-se, também, a independência probabilística e as provas repetidas. Destaca-se ainda que, diferentemente dos programas anteriores, esta temática constitui o primeiro tema de cada um dos programas dos respectivos anos.

Uma outra alteração importante resultou da introdução de uma nova disciplina no ensino secundário, a disciplina de Métodos Quantitativos. Esta disciplina, com carácter obrigatório para os alunos que não têm a disciplina de Matemática no seu currículo, contempla um capítulo de estatística e outro de probabilidades, muito semelhantes aos correspondentes capítulos integrados na disciplina de Matemática do ensino secundário do 10º e 11º anos (Ministério da Educação, 1992).

A mais recente alteração do programa de Matemática do ensino secundário, que começou a ser implementada no ano lectivo de 1997/98, não introduziu alterações de conteúdo ao programa anterior. A estatística descritiva passou a ser o último tema do programa do 10º ano e os temas de probabilidades e estatística, tratados anteriormente ao longo do 11º e 12º anos, foram reunidos no primeiro tema do 12º ano (Ministério da Educação, 1997).

Diferentemente do ensino secundário, é a primeira vez que o ensino da estocástica faz parte dos programas escolares da disciplina de Matemática do ensino básico. Com início no 5º ano de escolaridade, o estudo desta temática prossegue no 6º, 7º, 8º e 9º anos de escolaridade (Ministério da Educação, 1991a, 1991b). Durante os quatro primeiros anos, o estudo centra-se no estudo de noções básicas de estatística, destacando-se a recolha e organização de dados, as noções de frequência absoluta e relativa, a representação gráfica de dados e as medidas de tendência central. Finalmente, no 9º ano tratam-se noções elementares de probabilidades, especificamente, terminologia específica, a definição clássica de probabilidade e o estudo da frequência relativa como valor aproximado da probabilidade teórica.

Ao nível do ensino básico, o ensino da estocástica insere-se numa perspectiva de análise de dados e pode ser visto como uma dimensão importante da literacia que todos os alunos devem desenvolver na escola.

Em síntese, os novos programas de Matemática introduziram alterações radicais ao nível do ensino da estocástica. De uma situação em que as probabilidades e a estatística praticamente não eram ensinadas na escola, passou-se à situação actual em que o seu ensino se desenvolve desde o 5º ano até ao fim do ensino secundário. Enquanto antes, muito poucos alunos abordavam este assunto na escola, agora, todos os alunos o abordam no ensino básico e, para os que prosseguem os estudos, continua a ser tema de estudo no ensino secundário.

Apesar do destaque dado ao ensino de probabilidades e estatística nos actuais programas da disciplina de Matemática, deve considerar-se que as percepções dos professores sobre o seu ensino não são tão optimistas. Um estudo realizado em todo o país (Precatado *et al*., 1998) revelou que a maioria dos professores de Matemática inquiridos se pronunciou pela simplificação ou exclusão do tema, comparativamente com a possibilidade de desenvolvimento, especialmente no 3º ciclo e no ensino secundário.

1.2. Razões para ensinar a estocástica na escola

Há três razões para ensinar o tema de probabilidades e estatística na escola: (1) a utilidade na vida quotidiana da generalidade das pessoas, (2) a continuação de estudos futuros e (3) o desenvolvimento do sentido estético (Pereira-Mendoza & Swift, 1981).

A sua utilidade é bem patente no facto de a linguagem da estatística e das probabilidades fazer parte da vida do dia-a-dia. As pessoas necessitam de conhecimentos de probabilidades e estatística para se integrarem plenamente na sociedade actual. Este aspecto é tanto mais importante quanto mais desenvolvida for a sociedade em que nos inserimos (Holmes, 1981).

Por outro lado, conhecimentos de estatística e probabilidades são imprescindíveis numa grande variedade de estudos futuros. Estão nesta situação a generalidade dos cursos da área científico-natural e mesmo dos cursos no domínio das ciências sociais e humanas. Especialmente em conexão com a estatística, as probabilidades têm sido largamente utilizadas nos mais variados cursos. Além de constituir uma disciplina que integra os planos de estudo de muitos cursos, a estatística e as probabilidades são largamente utilizadas na investigação científica. Neste caso, a estatística é vista frequentemente como um meio de tornar credíveis os resultados da própria investigação.

Finalmente, os aspectos estéticos constituem um aspecto importante no desenvolvimento da apreciação da beleza de um tópico, seja como uma área da matemática, seja através das suas aplicações à ciência, à tecnologia e à natureza. Este sentido estético extrai-se da apreciação do poder das técnicas e da consciencialização da responsabilidade numa aplicação elegante daquelas técnicas.

Para Borovcnik e Peard (1996) existem duas razões que legitimam a introdução das probabilidades no currículo escolar a qualquer nível. A primeira, resulta de perspectivar o pensamento probabilístico como um tipo específico de pensamento, tal como o pensamento geométrico e o pensamento algébrico. Face à matemática, as probabilidades constituem uma oportunidade de questionar a dicotomia verdade *versus* falsidade, acrescentando-se a categoria do possível; destacam a importância do valor aproximado em relação ao valor exacto e salientam a impossibilidade de controlar o resultado de uma única experiência. Este tipo de pensamento pode beneficiar do estudo das probabilidades na escola.

Uma segunda razão, deriva da sua utilidade em termos de aplicações. Todavia, o âmbito destas aplicações deve ser relativizado, consoante os modelos probabilísticos modelam directamente a realidade ou o fazem através da estatística. No caso dos métodos estatísticos se basearem no raciocínio probabilístico, verifica-se que as aplicações das probabilidades abundam na vida social e nas ciências, o que confere às probabilidades uma grande importância. Contudo, existem abordagens à inferência estatística que minimizam o papel das probabilidades, e que, consequentemente, diminuem a sua importância. É exemplo desta última abordagem, a *Exploratory Data Analysis* (EDA), desenvolvida por Tukey (1977), em que as generalizações se justificam a partir de padrões. Uma abordagem que passe pela eliminação das probabilidades, naturalmente, não promove o desenvolvimento do pensamento probabilístico.

Para Falk e Konold (1992), as probabilidades estabelecem uma estratégia diferente para pensar acerca da realidade, relativamente a uma abordagem lógica ou causal. Para estes autores, os conceitos de incerteza são introduzidos nas ciências porque somos ignorantes acerca da multiplicidade de variáveis que afectam os dados ou porque as nossas medições envolvem algum erro. Numa perspectiva mais extrema, o acaso é uma parte não redutível aos fenómenos naturais deterministas e, em consequência, é visto como inerentemente indeterminado.

1.3. Apresentação do problema

As pessoas em geral, e os alunos em particular, têm ideias acerca dos mais variados assuntos. Tais ideias podem desenvolver-se em ambientes informais ou em ambientes formais, sendo exemplo destes últimos a escola e, mais especificamente, a sala de aula.

Por outro lado, estas ideias podem basear-se em argumentos normativos, que a escola procura desenvolver, ou em argumentos não normativos. No caso das ideias baseadas em argumentos não normativos, verifica-se que elas são frequentemente erradas e têm sido objecto de estudo no paradigma de investigação das 'concepções erradas'. Assim, no caso da matemática, no âmbito do estudo das concepções erradas procura-se compreender as origens, o desenvolvimento e a eliminação de ideias fundamentalmente erradas (Fernandes, 1990; Garfield & Ahlgren, 1988; Kahneman, Slovic & Tversky, 1982; Shaughnessy, 1977).

Kahneman e Tversky, nos seus muitos e variados estudos, demonstraram que as pessoas recorrem, frequentemente, a 'heurísticas' e 'falácias' para efectuarem julgamentos em probabilidades. A heurística refere-se a uma estratégia, deliberada ou não, para produzir uma estimativa ou uma predição, sendo sua característica a omissão de certas considerações relevantes para a tomada de decisão. A falácia é um erro conceptual e não meramente verbal ou técnico, que provavelmente seria repetido em situações semelhantes, e em que a resposta correcta ou um procedimento para encontrá-la é do conhecimento do sujeito (Tversky & Kahneman, 1983).

No caso das ciências, incluindo a física, a química e a biologia, usa-se com muita frequência os termos 'ideias alternativas' (Duarte, 1987) ou 'concepções alternativas'

(Leite, 1993) para designar as ideias baseadas em argumentos não normativos. Obviamente, estes termos não transportam um possível sentido negativo inerente à alusão ao erro.

Para salientar o facto dos alunos possuírem ideias antes de experienciarem qualquer tipo de ensino, elas são também designadas por 'ideias prévias' ou 'concepções prévias' (Ausubel, Novak & Hanesian, 1980).

O termo 'intuições', que usaremos neste estudo, pretende englobar todos os aspectos referidos (Fischbein, 1987), destacando-se nas intuições a argumentação não normativa e a possibilidade de conduzirem a respostas correctas ou erradas. Do ponto de vista psicológico, as intuições são cognições que são aceites pela sua imediaticidade e auto-evidência e em que não se sente qualquer necessidade pessoal de prova formal ou empírica (Fischbein, 1987).

Fischbein (1987) classifica as intuições em afirmativas e antecipadoras. As intuições afirmativas "são representações ou interpretações de factos aceites como certos, auto-evidentes e auto-consistentes" (p. 39) e as intuições antecipadoras "representam as visões preliminares e globais que precedem as soluções completas e analíticas dos problemas" (p. 39).

No caso das intuições afirmativas, Fischbein (1975, 1987) ainda as classifica em primárias e secundárias. As intuições primárias desenvolvem-se com base na experiência natural do indivíduo, independentemente de qualquer ensino sistemático. Diferentemente, as intuições secundárias desenvolvem-se com base em alguma intervenção de ensino e frequentemente contradizem as intuições primárias.

No caso específico das probabilidades, são vários os estudos que revelam que os alunos possuem intuições probabilísticas (Fernandes, 1990; Fischbein, Barbat & Mînzat, 1975; Fischbein, Nello & Marino, 1991; Green, 1983; Kahneman, Slovic & Tversky, 1982; Konold, 1983).

A existência destas ideias intuitivas é influenciada, em maior ou menor grau, por diferentes variáveis inerentes ao sujeito, como o sexo, o desempenho em matemática e a experiência de ensino em probabilidades.

Green (1982, 1983) verificou no seu estudo, envolvendo alunos dos 11 aos 16 anos de idade, que as variáveis idade e capacidade de raciocínio geral tiveram um efeito positivo sobre a realização num teste sobre cálculo combinatório, probabilidades e compreensão verbal. A substituição da capacidade de raciocínio geral pela capacidade matemática manteve essencialmente os mesmos efeitos positivos. Além disso, os alunos do sexo masculino obtiveram, de forma consistente, *scores* mais altos do que os alunos do sexo feminino nos itens de probabilidades e de compreensão verbal.

Munisamy e Doraisamy (1998) conduziram um estudo semelhante ao de Green junto de alunos malaios do ensino secundário, tendo-se confirmado, em geral, os resultados obtidos por Green. Assim, os alunos do sexo masculino obtiveram *scores* mais altos do que os alunos do sexo feminino em todas as questões, tendo a superioridade dos rapazes aumentado com a maturação.

No caso da variável ano escolar, observou-se que, comparativamente com os alunos do 4º ano, a extensão das ideias probabilísticas foi superior para os alunos do 6º ano. Em relação à capacidade matemática, verificou-se que os alunos de capacidade matemática superior atingiram níveis de aquisição do conceito também superiores, comparativamente com os alunos de capacidade matemática média e inferior.

Embora num contexto de situações probabilísticas contra-intuitivas e envolvendo alunos do 11º ano, sem ensino de probabilidades, e alunos do 4º ano da Licenciatura em Ensino de Matemática, com ensino de probabilidades, Fernandes (1990) observou resultados apenas ligeiramente díspares dos referidos antes. Os alunos com ensino de probabilidades cometeram ligeiramente menos erros e afirmaram as suas respostas com menor confiança, em relação aos alunos sem ensino de probabilidades. Também não se observaram diferenças na confiança com que os alunos afirmaram as respostas correctas comparativamente com as respostas erradas.

Em relação à variável sexo, observou-se que os alunos do sexo masculino afirmaram as suas respostas com maior confiança. Verificou-se, ainda, que estas diferenças não foram explicadas pelas respostas erradas nem pela realização escolar.

Finalmente, verificou-se, em ambos os grupos, que a realização escolar não distinguiu os alunos quanto às respostas erradas no conjunto das situações probabilísticas estudadas.

Reconhecendo que os alunos possuem intuições probabilísticas acerca dos mais variados assuntos, é da maior importância identificar estratégias de ensino eficazes para lidar com essas intuições. O facto das intuições poderem confirmar ou contrariar as ideias probabilísticas que a escola procura desenvolver nos alunos, implica uma primeira orientação em termos de ensino. Quando as intuições são correctas, elas constituem um ponto de partida adequado para o ensino. Já no caso das intuições erradas, a situação é diversa. Perante intuições erradas, o ensino deve dirigir-se à sua eliminação ou alteração.

O profundo enraizamento destas ideias na estrutura cognitiva do aprendiz, consequência das suas características e o facto de serem partilhadas mesmo por peritos em probabilidades e estatística, como mostram vários estudos de Kahneman e Tversky (Kahneman, Slovic & Tversky, 1982; Tversky & Kahneman, 1983), implica que a alteração ou eliminação das intuições constitui, em geral, uma tarefa difícil em termos de ensino e de efeitos limitados. Face a estas dificuldades e limitações, enquanto Kahneman e Tversky se mostram cépticos perante as possibilidades do ensino alterar ou eliminar intuições, Nisbett, Krantz, Jepson e Kunda (1983) manifestam uma posição mais optimista e outros autores conceberam e conduziram experiências de ensino com relativo sucesso no âmbito das intuições.

Nisbett, Krantz, Jepson e Kunda (1983) realizaram vários estudos em que identificaram factores que afectam o raciocínio indutivo em situações do dia-a-dia, designadamente, crenças acerca da homogeneidade/heterogeneidade dos objectos ou sujeitos, a saliência de parâmetros da distribuição, a saliência de factores do acaso, a experiência da situação e o treino em estatística. Para estes autores, muito embora não se deva concluir dos seus estudos que a educação em estatística é suficiente para garantir que as pessoas não cometem erros nos raciocínios de indução, o ensino pode tirar vantagem da exploração destes factores.

Shaughnessy (1977) verificou que uma estratégia de ensino baseada em pequenos grupos, explorando a recolha, organização e análise de dados e a formulação de princípios ou modelos de probabilidades e estatística, teve um efeito positivo ao ajudar alunos universitários a ultrapassarem concepções probabilísticas erradas, especificamente, as heurísticas da representatividade e da disponibilidade.

Numa perspectiva diferente, Agnoli (1987) observou que o treino em regras lógicas, para fazer comparações extensivas e de frequências, teve um impacto positivo na diminuição à adesão da falácia da conjunção em adultos e em alunos de 11 e 13 anos de idade.

Para avaliar o impacto indirecto do ensino de probabilidades sobre os julgamentos probabilísticos intuitivos, Fischbein e Gazit (1984) implementaram uma experiência de ensino com alunos entre os 10 e os 13 anos de idade, enfatizando o carácter prático e a relação entre probabilidades calculadas *a priori* e as frequências obtidas empiricamente. No caso dos alunos mais novos, do 5º ano, os resultados não foram suficientemente conclusivos, pois as aquisições conceptuais foram muito baixas. Já no caso dos alunos do 6º e 7º anos, concluiu-se que o programa de ensino teve um efeito positivo sobre inviesamentos intuitivos comuns.

Finalmente, Castro (1998) conduziu uma experiência de ensino de probabilidades, inserida numa perspectiva de mudança conceptual. Os resultados obtidos neste estudo, envolvendo alunos de 14-15 anos, demonstraram que a estratégia de mudança conceptual, comparativamente com o ensino tradicional, foi mais eficiente ao nível dos *skills* elementares de cálculo de probabilidades e do raciocínio probabilístico intuitivo.

Enquanto os estudos anteriores de Agnoli, de Castro, de Fischbein e Gazit e de Shaughnessy constituem exemplos de experiências de ensino mais ou menos longas, Cox e Mouw (1992) desenvolveram um estudo de curta duração. Neste caso, exploraram-se sinais do contexto da situação probabilística, enquanto características essenciais da evidência. Uma tal estratégia, resultante da adição e eliminação de sinais, mostrou ser eficaz na diminuição da adesão à heurística da representatividade entre alunos universitários, particularmente na sua forma combinatória.

Também numa intervenção de ensino de curta duração, Fast (1997) mostrou que a exploração de intuições ancoradoras, caracterizadas por Clement (1987) no domínio da física, teve um efeito positivo sobre a diminuição na adesão a concepções erradas em probabilidades, entre estudantes universitários (futuros professores de matemática).

Inserido no domínio das intuições probabilísticas, o presente trabalho de investigação trata de dois aspectos fundamentais das intuições em conteúdos elementares de probabilidades: (1) a existência e caracterização de intuições em alunos do 8º e 11º anos de escolaridade, e (2) o papel que as intuições podem desempenhar no ensino de probabilidades ao nível do 9º ano de escolaridade.

1.4. Questões de investigação

Com base na literatura no âmbito das intuições probabilísticas e a partir da percepção do autor sobre esta problemática, resultante do estudo que lhe vem dedicando, estabeleceram-se, no âmbito de conteúdos elementares de probabilidades, as seguintes questões de investigação:

Questão de investigação 1. Que intuições probabilísticas possuem alunos do 8º ano de escolaridade comparativamente com alunos do 11º ano de escolaridade?

Questão de investigação 2. Há diferenças nas respostas correctas em relação às variáveis ano escolar, desempenho em matemática, sexo, ensino de probabilidades e interpretação do conceito de probabilidade, entre alunos do 8º ano e/ou do 11º ano de escolaridade?

Questão de investigação 3. Há diferenças na confiança nas respostas, em relação às variáveis ano escolar, desempenho em matemática, sexo e ensino de probabilidades, entre alunos do 8º ano e/ou do 11º ano de escolaridade?

Questão de investigação 4. No 9º ano de escolaridade, um tipo de ensino que considere as ideias intuitivas dos alunos tem um maior impacto na aprendizagem de probabilidades, comparativamente com um ensino tradicional, no que respeita às intuições, às respostas correctas e ao cálculo de probabilidades?

1.5. Descrição sumária da investigação

A investigação realizada é constituída por dois estudos. No primeiro estudo, designado por 'Estudo sobre intuições probabilísticas', identificaram-se e caracterizaram-se intuições de alunos do 8º e 11º anos de escolaridade em conteúdos elementares de probabilidades.

Este estudo insere-se na categoria de estudos descritivos, assumindo aspectos de uma investigação de aproximação descritiva transversal e de uma investigação comparativa, com propósitos explicativos (Gall, Borg & Gall, 1996).

Em termos de questões de investigação, incluem-se neste estudo as três primeiras questões de investigação. Assim, em síntese, identificaram-se e caracterizaram-se intuições, segundo as variáveis ano escolar e ensino de probabilidades; estudaram-se as respostas correctas, segundo as variáveis ano escolar, desempenho em matemática, sexo, ensino de probabilidades e interpretação do conceito de probabilidade; e estudou-se a confiança nas respostas, segundo as variáveis ano escolar, desempenho em matemática, sexo e ensino de probabilidades.

No segundo estudo, designado por 'Estudo sobre o ensino de probabilidades', elaborou-se e avaliou-se uma estratégia de ensino que considera as intuições dos alunos em conteúdos elementares de probabilidades. Participaram neste estudo alunos do 9º ano de escolaridade e na experiência de ensino tratou-se o tema 'Estatística e probabilidades', incluído no programa da disciplina de Matemática do 9º ano de escolaridade.

Este estudo insere-se na categoria de estudos quase-experimentais, do tipo pré-teste pós-teste e envolvendo dois grupos de alunos – o grupo experimental e o grupo de controlo (Gall, Borg & Gall, 1996). Estes dois grupos de alunos foram submetidos a tratamentos diferentes. No caso de grupo experimental, seguiu-se uma metodologia de ensino que valorizasse as intuições, e, no caso do grupo de controlo, seguiu-se uma metodologia de ensino tradicional.

Em termos de questões de investigação, inclui-se neste estudo a última questão de investigação. Assim, em síntese, estabeleceu-se uma estratégia de ensino que contemplou as intuições, tendo sido avaliada, por comparação com o ensino tradicional, ao nível das intuições, ao nível das respostas correctas e ao nível do cálculo de probabilidades.

Na Figura 1, faz-se uma descrição sumária de cada um dos dois estudos referidos anteriormente.

1. ESTUDO SOBRE INTUIÇÕES PROBABILÍSTICAS
(Alunos do 8º e 11º anos de escolaridade)

1.1. Identificação e caracterização de intuições (variáveis: ano escolar e ensino de probabilidades).

1.2. Respostas correctas (variáveis: ano escolar, desempenho em matemática, sexo, ensino de probabilidades e interpretação do conceito de probabilidade)

1.3. Confiança nas respostas (variáveis: ano escolar, desempenho em matemática, sexo e ensino de probabilidades).

↓

2. ESTUDO SOBRE O ENSINO DE PROBABILIDADES
(Alunos do 9º ano de escolaridade)

2.1. Definição de uma estratégia de ensino.

2.2. Avaliação da estratégia de ensino, por comparação com um ensino tradicional, ao nível das intuições, das respostas correctas e do cálculo de probabilidades.

Figura 1. Descrição sumária dos dois estudos realizados.

Entre os dois estudos, acima descritos, existe uma relação de dependência, como se salienta na Figura 1. Fundamentalmente, no ‘Estudo sobre intuições probabilísticas’ identificaram-se e caracterizaram-se intuições probabilísticas de alunos com idade muito próxima daqueles que iriam ser submetidos à experiência de ensino. Posteriormente, no ‘Estudo sobre o ensino de probabilidades’, estas intuições desempenharam um papel importante na definição da estratégia de ensino dirigida ao grupo experimental.

1.6. Importância da investigação

O interesse da investigação pode ser visto em relação à formação de professores e ao ensino e à aprendizagem de probabilidades.

No domínio da formação de professores, não tem havido uma correspondência entre a importância que é dada ao estudo da estocástica nos actuais programas do ensino não superior e a formação que é proporcionada aos professores. Deve recordar-se que o tema de probabilidades e estatística faz parte dos programas escolares das disciplinas de Matemática desde o 5º ano até ao 12º ano, exceptuando apenas o 11º ano.

As limitações de formação verificam-se já na formação inicial, onde os alunos (futuros professores de matemática) têm, em geral, uma disciplina semestral ou anual sobre probabilidades e estatística. Também no âmbito da formação contínua, comparativamente com outros temas dos programas de matemática, o tema de probabilidades e estatística é menos tratado. Todavia, com a recente introdução de tecnologia no ensino da matemática tem-se assistido a um incremento da formação envolvendo directa ou indirectamente a estatística. A reduzida oferta de formação no domínio da estocástica é também visível nos encontros e nas publicações mais dirigidas aos interesses e necessidades dos professores do ensino não superior. Esta realidade é confirmada, por exemplo, nas actas dos Encontros Nacionais de Professores de Matemática (ProfMats) e na revista Educação e Matemática, que são publicações da Associação de Professores de Matemática (APM).

A divulgação dos resultados desta investigação na formação inicial, ao nível da disciplina de Didáctica da Matemática ou de Metodologia do Ensino da Matemática, e na formação contínua, ao nível de cursos e acções de formação, pode contribuir para melhorar a formação dos professores, particularmente em conteúdos elementares de probabilidades. Deve destacar-se, ainda, que existem muito poucos estudos publicados no nosso país sobre o ensino de probabilidades (Ponte, Matos & Abrantes, 1998).

Em relação ao ensino e à aprendizagem de probabilidades, salienta-se que os alunos possuem intuições no domínio das probabilidades. Frequentemente, estas intuições são limitadas ou mesmo erradas (Fernandes, 1990; Green, 1982; Kahneman, Slovic & Tversky, 1982; Konold, 1983; Tversky & Kahneman, 1983), opondo-se ao saber normativo que, em última instância, a escola deve promover nos alunos. Assim, se pretendermos implementar um ensino eficaz, é da maior importância identificar as intuições dos alunos, sejam elas correctas ou erradas.

Especialmente nos níveis escolares básicos, em que se centrou este estudo, há a convicção entre muitos professores que a aprendizagem de probabilidades não levanta grandes dificuldades aos alunos. Ora, uma tal opinião choca com o que foi dito acerca da existência de intuições limitadas e erradas nos alunos. A explicação desta divergência passa, em muitos casos, pela forma como é abordado o conceito de probabilidade. De conceito multifacetado, frequentemente, ele é apresentado aos alunos apenas como fracção do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis. Deste modo, reduz-se o estudo das probabilidades ao estudo de fracções simples. Acrescenta-se, ainda, que a fracção como medida da probabilidade não implica pré-requisitos de cálculo consideráveis, o que pode reforçar o ponto de vista dos professores.

Conhecidas as ideias intuitivas dos alunos em probabilidades, aspecto tratado no primeiro estudo desta investigação, coloca-se a questão de como lidar com essas ideias no ensino das probabilidades, aspecto que foi tratado no segundo estudo desta investigação. Pode dizer-se desde já que, no caso das intuições correctas, elas podem constituir um bom ponto de partida para o ensino e, no caso das intuições erradas, elas exigem, geralmente, uma atenção e um esforço especiais para os alunos as ultrapassarem.

Em síntese, o conhecimento de intuições dos alunos e de formas possíveis de integrá-las no processo de ensino constituem dois aspectos que se revestem da maior importância na formação de professores de matemática e que deve ter consequências ao nível dos programas escolares, especificamente em relação aos conteúdos e às metodologias de ensino.

1.7. Limitações da investigação

No processo de definição e implementação dos dois estudos desta investigação, identificam-se duas limitações importantes, que, consequentemente, devem ser consideradas na avaliação dos resultados dos estudos.

A primeira limitação dos estudos, refere-se ao facto de não se ter realizado uma escolha aleatória dos alunos que participaram nos estudos. A adopção deste procedimento deveu-se, para além de condicionalismos de tempo e custos, a dificuldades resultantes da organização das escolas em geral. Para atenuar esta limitação usaram-se amostras de razoável dimensão e equilibradas em relação ao número de alunos nas variáveis sexo, desempenho em matemática e ensino de probabilidades (Ferguson & Takane, 1989). Todavia, apesar destas precauções, devemos ter presente que a selecção não aleatória dos alunos diminui a confiança com que podemos generalizar os resultados obtidos a universos mais vastos (Wonnacott & Wonnacott, 1990).

No caso dos alunos do 11º ano de escolaridade, que participaram no primeiro estudo, deve observar-se que todos eles, à excepção de uma turma, pertenciam a uma mesma escola da cidade de Braga. A escolha destes alunos justificou-se pelo facto de nessa escola não ter sido leccionado o tema de 'Estatística e probabilidades' nas turmas a que pertenceram parte destes alunos durante o 9º ano de escolaridade. Desta forma, conseguiu-se envolver no estudo alunos do 11º ano de escolaridade com e sem ensino de probabilidades, permitindo, assim, estudar mais profundamente a influência do ensino de probabilidades sobre as intuições. Relativamente aos alunos da turma da outra escola, a situação era semelhante, até porque muitos deles tinham sido alunos da primeira escola durante o 9º ano.

A segunda limitação, relativa ao segundo estudo, refere-se à experiência de ensino de probabilidades realizada com alunos do 9º ano de escolaridade. Neste caso, o constrangimento do tempo previsto no programa escolar para a leccionação do tema de 'Estatística e probabilidades' dificultou o desenvolvimento de uma estratégia de ensino de probabilidades, contemplando as intuições, num período mais alargado de tempo. Mesmo assim, o tempo de ensino do tema foi superior em relação ao que estava previsto no programa oficial (Ministério da Educação, 1991b).

1.8. Definição de termos

Análise de dados. Este termo é geralmente usado nas escolas secundárias para referir um problema, coleccionar dados e organizar, reduzir e interpretar dados com a ajuda de análises gráficas (Watkins, Burrill, Landwehr & Scheaffer, 1992).

Estocástica. O termo estocástica é usado para designar conjuntamente o estudo da estatística e das probabilidades, e tem sido utilizado particularmente na Europa Continental (Borovcnik, 1991; Garfield & Ahlgren, 1988; Shaughnessy, 1992).

Experiências simples e experiências compostas. Por contraste com as experiências simples em probabilidades, que envolvem uma experiência com um objecto aleatório (por exemplo, lançar uma moeda ao ar ou extrair uma bola de uma urna), as experiências compostas implicam várias experiências de um mesmo objecto aleatório ou uma só experiência com vários objectos aleatórios (por exemplo, lançar duas vezes ou mais uma moeda ao ar ou extrair duas bolas ou mais de uma urna).

Intuições. As intuições são crenças cognitivas elaboradas e confirmadas repetidamente pela prática, que se caracterizam pela sua auto-evidência, certeza intrínseca, persistência, coercividade, condição teórica, extrapolação e completude (Fischbein, 1987).

Intuições primárias. "Intuições primárias referem-se àquelas crenças cognitivas que se desenvolvem nos indivíduos independentemente de qualquer instrução sistemática como consequência da sua experiência individual." (Fischbein, 1987, p. 64)

Intuições secundárias. "A categoria das intuições secundárias implica a assunção que novas intuições, com raízes não naturais, podem ser desenvolvidas. Estas intuições não resultam da experiência natural e normal do indivíduo. Além disso, muito frequentemente elas contradizem a atitude natural em relação à mesma questão." (Fischbein, 1987, p. 68). Portanto, diferentemente das intuições primárias, as intuições secundárias desenvolvem-se com base em alguma intervenção de ensino.

Situações contra-intuitivas. São situações em que os estudantes têm uma intuição primária que contraria e é muito resistente a uma perspectiva normativa, pelo menos inicialmente (Lesser, 1994). Assim, o termo contra-intuitivo não significa não-intuitivo. Ainda, para Lesser (1994), o que é contra-intuitivo pode ser definido operacionalmente como um resultado "surpreendente" para uma elevada percentagem de pessoas numa população e num tempo particulares.

C A P Í T U L O I I

REVISÃO DE LITERATURA

2.1. As Intuições em matemática

Nesta secção refere-se, de forma breve e genérica, o papel das intuições no desenvolvimento da matemática e caracterizam-se e classificam-se as intuições numa perspectiva psicopedagógica, com particular incidência na matemática.

2.1.1. As intuições e o desenvolvimento da matemática

A matemática tem-se apoiado nas intuições desde os tempos mais recuados da sua história. As intuições têm desempenhado, ao longo dos tempos, um lugar de destaque na validação do conhecimento matemático e na sua própria criação.

Para os gregos, o raciocínio acerca de conceitos matemáticos começava com os axiomas, que eram considerados verdades auto-evidentes de que ninguém podia duvidar. A origem destas verdades podia, contudo, ser diferente (Kline, 1980). Para Platão, elas tinham a sua existência num mundo objectivo, o mundo das ideias, e para conhecê-las os homens deviam ser estimulados a recordar as suas experiências anteriores, vividas para além da sua existência terrestre. Assim, os axiomas e teoremas da matemática existem num mundo objectivo independente do homem.

Aristóteles coloca a questão da verdade em matemática de outro modo. Para ele, "os axiomas são princípios inteligíveis que apelam à mente fora de qualquer possibilidade de dúvida. Os axiomas, disse em *Analíticos Posteriores*, sabe-se que são verdadeiros através da nossa intuição infalível" (Kline, 1980, p. 20). A partir destas primeiras verdades, segundo Aristóteles, derivam-se outras verdades através do raciocínio silogístico.

Em pleno Renascimento, o grande matemático e filósofo René Descartes (1596-1650) afirmava na *Regra III* da sua obra *Regras para a Direcção do Espírito*:

> "No que respeita aos objectos considerados, há que procurar não o que os outros pensaram ou o que nós próprios suspeitamos, mas aquilo de que podemos ter uma intuição clara e evidente ou que podemos deduzir com certeza; de nenhum outro modo se adquire a ciência." (Descartes, 1989, p. 18).

A respeito do que entende por intuição, diz Descartes:

> "Por intuição entendo, não a convicção flutuante fornecida pelos sentidos ou o juízo enganador de uma imaginação de composições inadequadas, mas o conceito de mente pura e atenta tão fácil e distinto que nenhuma dúvida nos fica acerca do que compreendemos" (Descartes, 1989, p. 20).

Para Descartes (1989) podemos ver pela intuição intelectual, por exemplo, que existimos, que pensamos, que um triângulo é delimitado apenas por três linhas e que a superfície esférica é delimitada apenas por uma superfície.

Assim, segundo Descartes, qualquer ciência não se pode adquirir senão pela intuição intelectual ou pela dedução. Distinguindo entre estes dois processos mentais, Descartes afirma no desenvolvimento da *Regra V*:

> "É necessário notar, em segundo lugar, que são poucas as naturezas puras e simples, que se podem ver por intuição imediatamente e por isso mesmas, independentemente de quaisquer outras, mas nas próprias experiências ou graças a uma certa luz que nos é inata; dizemos que importa considerá-las diligentemente, porque são as mesmas que, em cada série, chamamos as mais simples. Quanto a todas as outras, só podem ser percebidas deduzindo-as das primeiras, quer por uma inferência imediata e próxima, quer apenas mediante duas, três ou mais conclusões diferentes, cujo número também deve ser notado, a fim de sabermos se mais ou menos degraus as afastam da proposição que é a primeira e a mais simples." (Descartes, 1989, p. 35)

Com a pujança do empirismo, assiste-se a um questionamento profundo dos fundamentos da ciência e do valor do próprio raciocínio. David Hume (1711-1776), destruindo a doutrina de um mundo seguindo leis matemáticas, destruiu também o valor de uma estrutura lógico-dedutiva que representou a realidade a partir de Aristóteles.

> "Como para os axiomas, eles [os teoremas] emanam de sensações acerca do mundo físico presumido. Os teoremas são de facto consequências necessárias dos axiomas mas não são mais do que repetições elaboradas dos axiomas. Eles são deduções, mas deduções de proposições implícitas nos axiomas. Eles são tautologias. Assim, não há verdades nos axiomas ou nos teoremas." (Kline, 1980, p. 75)

A negação da razão por Hume e muitos outros, enquanto a mais elevada faculdade do homem, tornou-se revoltante para a generalidade dos pensadores do século XVIII. É neste contexto que Immanuel Kant (1724-1804), um dos maiores filósofos de todos os tempos, defende a existência de certas cognições sintéticas *a priori* independentes da experiência.

Para Kant (1989), os juízos sintéticos de carácter empírico justificam-se pelas experiências sensoriais, que constituem o elemento de síntese dos enunciados envolvidos. No caso dos juízos sintéticos de carácter *a priori*, característicos da matemática, a situação é diversa. Neste caso, não podendo justificar-se a síntese pela experiência nem extraída da análise da forma do enunciado, como acontece nos juízos analíticos, tem de se recorrer à intuição para tornar possível uma tal síntese. A propósito da proposição 7+5=12, envolvendo os conceitos de sete e de cinco, afirma Kant:

> "Temos de superar estes conceitos, procurando a ajuda da intuição que corresponde a um deles, por exemplo os cinco dedos da mão ou [...] cinco pontos, e assim acrescentar, uma a uma, ao conceito de sete, as unidades do número cinco dadas na intuição." (Kant, 1989, p. 47)

Segundo Kant, princípios como 'a linha recta é o caminho mais curto entre dois pontos', 'três pontos não colineares determinam um plano' ou o postulado das paralelas de Euclides, designados por verdades sintéticas *a priori*, fazem parte da nossa estrutura mental. Por conseguinte, a ciência da geometria meramente explora as consequências lógicas destes princípios, devendo a experiência submeter-se aos princípios básicos e aos teoremas. Portanto, o modo como ordenamos e racionalizamos o mundo é-nos imposto pelas nossas mentes e pelos nossos modos de pensamento.

Com Kant, passou-se da teoria realista de Platão, embora inacessível à experiência sensorial, à teoria conceptualista que sustenta que os objectos do conhecimento geométrico são reais, mas têm uma realidade no interior das nossas mentes (Barker, 1969).

O facto de Kant estabelecer que as leis da geometria euclidiana são os mecanismos que permitem ao homem organizar e racionalizar as suas sensações, desencadeou, com o aparecimento das geometrias não euclidianas, profundas críticas e reservas às suas teorias. Kline (1980, p. 479), a respeito destas novas geometrias, afirma que os "matemáticos cientistas e iniciados foram compelidos a apreciar o facto de que *sistemas do pensamento baseados em afirmações acerca do espaço físico são diferentes daquele espaço físico*."

A origem do conhecimento matemático não foi apenas questionada com as criações de Gauss (1777-1855), Lobatchevsky (1793-1856) e Bolyai (1802-1860), no âmbito das geometrias não euclidianas. Também os trabalhos de Cantor (1845-1918), no que concerne aos números transfinitos, e o mais variado tipo de falácias surgidas a respeito da teoria de conjuntos, designadamente as devidas a Bertrand Russell (1872-1970), desencadearam as mais profundas reacções.

Assim, a vasta e profunda actividade criativa a que se assistiu durante o século XIX e princípios do século XX, a par do aparecimento de inúmeras falácias e de resultados contra-intuitivos, levantou de novo a questão do estabelecimento de bases sólidas para alicerçar o conhecimento matemático. Para ultrapassar esta crise, conhecida por 'Crise dos Fundamentos', surgiram três correntes fundamentais: a corrente formalista, liderada por David Hilbert (1862-1943), a corrente logicista, liderada por Bertrand Russell, e a corrente intuicionista ou construtivista, liderada por Brower (1881-1966).

Enquanto os formalistas procuravam basear toda a matemática na formalização da aritmética, pois a geometria deixou de constituir uma base segura com o aparecimento das geometrias não euclidianas, e os logicistas procuravam alicerçar toda a matemática na lógica, os intuicionistas advogavam que toda a matemática devia ser elaborada por processos construtivos a partir da aceitação directa dos números inteiros. A este propósito, é bem conhecido o epigrama de Leopold Kronecker (1823-1891) proferido num discurso que se seguiu a um delicioso jantar: "Deus criou os números inteiros, tudo o resto é obra do homem."

Clarificando e distinguindo a corrente intuicionista relativamente à corrente formalista e à corrente logicista, diz Kline (1980, p. 234):

> "Brower concebeu o pensamento matemático como um processo de construção mental que constrói o seu próprio universo, independente da experiência e restringido apenas na medida em que ele deve ser baseado na intuição matemática fundamental. Este conceito intuitivo fundamental não deve ser pensado como na natureza de uma ideia não definida, tal como ocorre nas teorias axiomáticas, mas antes como alguma coisa em termos da qual todas as ideias não definidas que ocorrem nos vários sistemas matemáticos são para serem concebidas intuitivamente, se elas são de facto para estar ao serviço do pensamento matemático. Além disso, a matemática é sintética. Ela compõe verdades, mais do que deriva implicações da lógica."

Para os intuicionistas, segundo Snapper (1984), a matemática deve ser reconstruída de baixo para cima, começando-se pelos números naturais e procedendo através de um processo de construção indutivo e efectivo. No caso dos números naturais, o processo é indutivo no sentido que, se pretendermos construir o número 3, tem de se passar por todas as etapas, desde a construção do número 1, passando pela construção do número 2, até se chegar, finalmente, à construção do número 3. O processo de construção é efectivo na medida em que, depois de construído um número natural, no sentido indutivo, ele foi construído na sua totalidade.

A construção mental de um número natural só é possível na medida em que possuímos uma consciência imediata do tempo, ou, por outras palavras, na terminologia de Kant, uma intuição do tempo. Assim, para o intuicionista a matemática deve ser definida como uma actividade mental e não como um conjunto de teoremas como acontece no logicismo e no formalismo. Em termos filosóficos, esta actividade mental conecta o intuicionismo com o conceptualismo, enquanto o logicismo se relaciona com o realismo e o formalismo com o nominalismo (Snapper, 1984).

Diferentemente de Descartes, Pascal e Kant, que viam a intuição como um meio para alicerçar uma parte da matemática, Brower e a sua escola procuravam estabelecer uma base intuitiva para toda a matemática.

Também durante este mesmo período, entre os fins do século XIX e inícios do século XX, alguns matemáticos procuraram desvendar e explicar os processos mentais subjacentes à criação matemática. Interessados nesta questão, estiveram principalmente dois grandes matemáticos: Henri Poincaré (1854-1912) e Jacques Hadamard (1865-1963).

Para o grande matemático francês, Poincaré, "Criar não consiste em fazer novas combinações com entes matemáticos já conhecidos [...] Criar consiste, precisamente, não em construir as combinações inúteis mas as que são úteis e que estão em ínfima minoria. Criar é discernir, escolher..." (1974, p. 15). Assim, o verdadeiro trabalho criativo reside em eliminar, de entre estas combinações, aquelas que são inúteis, ou mesmo não efectuar tais combinações inúteis. Para este matemático, é uma intuição especial que permite aos verdadeiros criadores aperceberem-se das combinações úteis. Para tal, socorrem-se de uma sensibilidade estética especial que tem origem no sentimento de beleza da matemática, na harmonia dos números e das formas e na elegância geométrica.

As experiências relatadas por Poincaré (1974), permitem distinguir três momentos diferentes no trabalho de criação de um matemático: (1) dirigir intencialmente a sua atenção e os seus esforços para um problema; (2) ser confrontado com iluminações súbitas – sinais claros de um grande trabalho inconsciente anterior – que se caracterizam pela sua brevidade, instantaneidade e certeza imediata; e (3) procurar estabelecer uma demonstração rigorosa dos resultados a que chegou. É, portanto, no momento (2) que intervêm as intuições.

Estas iluminações súbitas, segundo Hadamard (1954), são geralmente precedidas por um período de incubação. Embora admitindo outras possibilidades, Hadamard destaca dois estados mentais que tornam estas iluminações possíveis: a hipótese do repouso, que consiste na ausência de fadiga mental, e a hipótese do esquecimento, que consiste em esquecer tentativas insucedidas, abordando posteriormente o problema com uma mente aberta.

Pelo facto de as intuições se processarem a um nível inconsciente, podia pensar-se que elas aconteceriam ao acaso, sem qualquer controlo por parte do matemático. Contudo, Poincaré (1974) defende que este trabalho inconsciente é motivado por esforços conscientes.

Poincaré (1932) distingue duas espécies de espíritos completamente diferentes: os lógicos ou analistas e os intuitivos ou geómetras. Os analistas preocupam-se, acima de tudo, com a lógica e progridem passo a passo, sem nada deixar ao acaso. Os geómetras, diferentemente, deixam-se conduzir pela intuição e progridem rapidamente, embora algumas vezes de forma precária. Segundo Poincaré, nem mesmo os lógicos que são verdadeiramente criativos podem dispensar de todo a intuição. Estes matemáticos basear-se-iam numa intuição diferente, a intuição do número puro, em que se fundamenta a indução matemática rigorosa e que difere da intuição sensível.

Para Hahn (1974), ilustre matemático austríaco, as descobertas do século XX questionaram profundamente as nossas crenças intuitivas sobre o mundo físico. A matemática constituía a única área onde se supunha manter o valor da intuição. Contudo, os inúmeros paradoxos e falácias surgidos por esta altura forçaram os matemáticos a reformularem o seu pensamento e a estabelecerem uma base incerta para premissas radicalmente novas. Hahn apresenta um conjunto de situações ou conceitos geométricos que dificilmente podem ser atingidos através da intuição, isto é, directamente sentidos ou apreendidos. Por exemplo, Karl Weierstrass construiu em 1861 uma curva que não possui tangente em ponto algum, o que equivale a dizer que é possível imaginar-se um ponto movendo-se de tal maneira que não tem uma velocidade definida em qualquer instante; Giuseppe Peano demonstrou em 1890 que as figuras geométricas geradas por um ponto que se move em tempo finito, incluem também superfícies planas inteiras; e W. Sierpinski demonstrou em 1915 existirem curvas em que todos os seus pontos são pontos de ramificação.

Apesar das dificuldades em captar intuitivamente os exemplos apresentados, ainda assim, Hahn advoga que a utilidade das geometrias multidimensionais e não euclidianas para ordenar a nossa experiência, de tal modo que nos vamos habituando cada vez mais a lidar com estas construções lógicas – na família, na escola, etc. –, faz com que a ninguém ocorra afirmar que estas geometrias são contrárias à intuição. Donde, um contacto constante com estas geometrias conferir-lhes-á um nível intuitivo semelhante ao que se atribui à geometria euclidiana tridimensional. Consequentemente, refutando-se o carácter *a priori* da intuição, o autor afirma que "não é certo, como propôs Kant, que a intuição é um meio puramente «a priori» do conhecimento. Mas antes é uma força do hábito enraizada na inércia psicológica." (Hahn, 1974, p. 213)

Para Wilder, à medida que aumenta a experiência do matemático, mais fiável se torna a sua intuição. Ou seja,

> "a intuição matemática, como a inteligência, é uma qualidade psicológica que, possivelmente, tem origem numa faculdade hereditária, mas que é, num dado momento, principalmente uma acumulação de atitudes derivadas da experiência matemática da pessoa." (Wilder, 1984, p. 38)

Em consequência, tal como advoga Hahn (1974), a intuição matemática é usada sobretudo naquelas áreas em que se tem alguma experiência matemática. Em contraste, aquele que é ignorante em termos matemáticos não tem qualquer intuição, a não ser uma qualidade nebulosa que se transformará em intuição através da experiência matemática.

Wilder (1984) distingue dois tipos de intuições: as intuições colectivas e as intuições individuais. As intuições colectivas, subjacentes aos conceitos que fazem parte da bagagem de qualquer matemático, é um tipo de intuição que é comum a todos os membros da comunidade matemática. Por exemplo, antes de Weierstrass apresentar um exemplo de função contínua sem derivada em qualquer ponto do seu domínio, quase todos os matemáticos sentiam intuitivamente que uma tal função não podia existir. Tomemos um exemplo mais recente, o conceito de curva fechada. Muito embora, saibamos hoje que existem exemplos simples de curvas fechadas que têm mais de dois domínios complementares, aparentemente por volta da viragem do século havia entre os matemáticos, em geral, a intuição que não podia haver senão apenas dois destes domínios, um interior e um exterior. Já no caso do problema do mapa das quatro cores e do chamado último teorema de Fermat[1], é improvável que o matemático, em geral, comungasse de qualquer intuição. Nestes casos, antes de adquirir um sentimento realmente intuitivo acerca destes problemas, o matemático deveria ter trabalhado sobre eles.

Quando nos deslocamos destes conceitos partilhados pela comunidade dos matemáticos para especialidades matemáticas, sobretudo para as suas fronteiras de conhecimento, então a intuição adquire uma dimensão individual. É esta intuição que é particularmente importante no trabalho criativo. A este propósito, Wilder afirma que é "quase uma verdade banal que sem intuição não há criatividade matemática." (Wilder, 1984, p. 43).

Nas intuições individuais, tal como nas intuições culturais, o matemático repete a experiência da cultura geral da matemática, agora a um nível diferente, na medida em que os esforços de um indivíduo ou de alguns indivíduos se dirigem a um problema particular e as mudanças acontecem a um maior ritmo. O que acontece, segundo Wilder, é que a intuição colectiva no domínio do problema particular continua a desenvolver-se, passando dos matemáticos mais velhos para os matemáticos mais novos. Por fim, devido a uma combinação de uma intuição colectiva com novos métodos e com um génio individual alguém é capaz de resolver o problema.

As intuições matemáticas estão longe de constituírem um critério de verdade. No caso das intuições que suportam a não existência de funções contínuas sem derivada em qualquer ponto do seu domínio e a não existência de curvas fechadas que são fronteira de mais de dois domínios complementares, trata-se de ideias erradas. Há, no entanto, outras intuições que são correctas. Estão nesta situação, a intuição dos números naturais ou de

[1] Estes dois problemas, em aberto há já muito tempo, foram resolvidos recentemente.

contagem, derivada da necessidade de estabelecer correspondências para comparar colecções de objectos físicos, a intuição envolvida na génese da geometria, necessária para comparar comprimentos e áreas, e a intuição de grandezas geométricas, que inclui virtualmente uma teoria completa dos números reais.

Na 14ª lição sobre História do Pensamento Matemático, que decorreu no ano lectivo de 1968/69, Sebastião e Silva destaca a importância das demonstrações como meio de evitar perigos inerentes à intuição. Segundo ele, podem apresentar-se exemplos de demonstrações aparentemente correctas de proposições geometricamente falsas. Os erros das demonstrações resultam, em muitos casos, de dados intuitivos sugeridos pelas figuras que acompanham as demonstrações. Em consequência, a validade das proposições matemáticas, em última instância, deve basear-se no rigor lógico, prescindindo da intuição baseada em figuras.

Wittmann (1981) acrescenta, ainda, que a intuição desempenha um papel importante na realização de testes intuitivos de inferências teóricas. No caso da asserção ‘todo o triângulo é isósceles’, que é uma afirmação falsa, a intuição diz-nos que existem triângulos que não são isósceles, permitindo concluir que estamos em face de um teorema falso. Assim, em geral, a intuição constitui-se como um meio para verificar demonstrações e detectar erros.

Para Wilder, para além do interesse óbvio das intuições correctas, mesmo as intuições erradas desempenharam e continuam a desempenhar um papel importante na evolução dos conceitos matemáticos. Neste sentido, este autor afirma:

> “a nossa intuição colectiva de conceitos básicos desenvolveu-se através de uma série de descobertas imperfeitas nos conceitos correntes, sendo estes substituídos por novos conceitos que não apenas clarificam as imperfeições mas conduzem a uma actividade febril sobre a nova fundação, com a consequente criação de muito boa matemática. Por fim, os novos conceitos começam a revelar-se imperfeitos; em particular, descobrimos que eles trazem consigo novas intuições que têm de ser tornadas conceptualmente mais precisas. E o ciclo continua.” (Wilder, 1984, p. 42)

Neste processo de refinamento constante das intuições, a aritmetização da análise, devida a Weierstrass e outros, forneceu uma nova concepção do contínuo real e tornou possível a teoria da medida e as brilhantes investigações da primeira metade do nosso século. Esta nova concepção do contínuo real deu origem a uma nova intuição, a formulação clássica da teoria de conjuntos, devida a Cantor. Algumas das suas imperfeições cedo foram descobertas e os novos *standards* de rigor foram estabelecidos numa formulação mais precisa da teoria de conjuntos. A situação, apesar de quase satisfatória, continua a suscitar reservas, designadamente, resultantes da adopção do axioma da escolha e da hipótese do contínuo.

Sintetizando muitos dos aspectos da intuição, abordados anteriormente, Davis e Hersh (1995) referem vários significados e usos do que é intuitivo. Para estes autores, o intuitivo (1) é o oposto de rigoroso e (2) significa visual, (3) plausível ou convincente na ausência de uma demonstração, (4) incompleto, (5) confiarmos num modelo físico ou em alguns exemplos importantes e (5) holístico ou integrativo, em oposição a pormenorizado ou analítico.

Para concluir, referindo-se ao que é a matemática, Courant e Robbins (1996, s/p) afirmam:

> "A matemática como expressão da mente humana reflecte a vontade activa, a razão contemplativa e o desejo de perfeição estética. Os seus elementos básicos são a lógica e a intuição, a análise e a construção, a generalidade e a individualidade. Apesar de diferentes tradições poderem enfatizar diferentes aspectos, é apenas a interacção destas forças estéticas e o esforço para a sua síntese que constituem a vida, a utilidade e o valor supremo da matemática."

2.1.2. As intuições numa perspectiva psicopedagógica

Bruner, eminente psicólogo e pedagogo americano, mostrou um grande interesse pela problemática das intuições, nomeadamente pela sua origem e a sua natureza e pelo seu papel no ensino. Para Bruner, a intuição é usada em matemática em dois sentidos diferentes.

"Por um lado, diz-se que um indivíduo pensa intuitivamente quando, tendo trabalhado por muito tempo sobre um problema, repentinamente encontra uma solução, para a qual, porém, tem que descobrir uma prova formal. Por outro lado, diz-se que um indivíduo é um bom matemático intuitivo se, quando outros lhe apresentam problemas, é capaz de, rapidamente, dar palpites muito bons sobre se algo é deste ou daquele modo, ou sobre qual será a mais fecunda abordagem de um problema, entre várias possíveis." (Bruner, s/d, p. 52)

A primeira perspectiva de intuição de Bruner, que permite descobrir soluções repentinas após um trabalho persistente e dirigido, acontece no trabalho de criação matemática, conforme relatam Poincaré (1974) e Hadamard (1954). O facto de a segunda perspectiva de intuição poder envolver características de personalidade, não elimina a necessidade de familiarização com o assunto em questão. A este propósito, Bruner destaca que a escola deve desenvolver nos alunos a capacidade de avançar palpites educados, por oposição aos palpites dados completamente ao acaso.

Distinguindo o pensamento analítico do pensamento intuitivo, Bruner (s/d) caracteriza o primeiro por caminhar passo a passo de forma explícita, podendo, geralmente, ser relatado a outra pessoa; processa-se com plena consciência da informação e das operações que implica; pode envolver raciocínio cuidado e dedutivo, utilizando matemática ou lógica e um plano de ataque explícito, ou um processo gradativo de indução e experimentação, utilizando princípios da técnica de pesquisa e de análise estatística. O pensamento intuitivo não progride através de passos cuidados e bem definidos, tendendo a incluir artifícios aparentemente baseados numa percepção global implícita do problema; permite obter uma resposta, certa ou errada, com pouca ou nenhuma consciência do processo pelo qual foi atingida, e, raramente, se pode fazer um relato adequado dos processos subjacentes à obtenção da resposta.

Para este autor, é a familiaridade com o campo de conhecimento em questão e com a sua estrutura, nas quais se baseia a intuição, que permite ao pensamento dar saltos e utilizar atalhos. Contudo, as conclusões assim obtidas requerem uma verificação analítica – por meios dedutivos ou indutivos –, o que destaca o carácter complementar dos pensamentos intuitivo e analítico. Consequentemente, através do pensamento intuitivo, o indivíduo gera hipóteses e combina ideias, as quais posteriormente são validadas pelos métodos usuais de prova.

A complementaridade entre o pensamento intuitivo e o pensamento reflexivo é destacada por Wittmann (1981). Especificamente, o pensamento intuitivo é concreto, imediato, indutivo, recorre a meios não simbólicos de representação e de processamento de informação e é parcialmente inconsciente. De um nível diferente, o pensamento reflexivo prende-se com a formulação explícita de relações, procedimentos e fundamentos gerais, isto é, ocupa-se de afirmações gerais sobre objectos e de operações com objectos. Para Wittmann (1981), a complementaridade destes dois tipos de pensamento é bem patente no facto de as inferências formais deverem ser testadas através de teorias informais, do mesmo modo que o pensamento reflexivo está dependente do pensamento intuitivo.

Considerando os processos heurísticos como, essencialmente, métodos não rigorosos de obter soluções para problemas, Bruner (s/d) advoga que as regras heurísticas gerais – analogia, simetria, exame de condições-limite e visualização da solução –, usadas frequentemente, apoiam e suportam o pensamento intuitivo.

Para Wittmann (1981), o desenvolvimento equilibrado entre o pensamento intuitivo, reflexivo e formal exige três tipos de actividades: (1) estudo operativo de uma variedade rica e diversificada de exemplos e modelos, em que os alunos manipulam objectos e investigam o seu comportamento quando submetidos a operações, para desenvolver o pensamento intuitivo; (2) estimulação e reflexão sobre as suas actividades intuitivas, procurando descobrir formulações gerais e ideias de demonstração; e (3) aprendizagem gradual da análise de conceitos, teoremas e demonstrações, enquanto primeiro passo para a axiomatização da matemática.

Por fim, extraindo evidência da importância e utilidade das intuições para os peritos, Bruner afirma:

> “O caloroso louvor, prodigalizado pelos cientistas àqueles de seus colegas que merecem o rótulo de ‘intuitivos’, constitui a maior evidência de que a intuição é um bem valioso em ciência e um bem que deveríamos empenhar-nos em fortalecer em nossos alunos.” (Bruner, s/d, p. 62)

Por seu lado, Scholz (1987) estabelece um conjunto de atributos do pensamento intuitivo e analítico, reforçando e detalhando as características referidas por Bruner. Este autor, a partir de vários resultados experimentais e evidência empírica fornecida por uma série de estudos piloto, concluiu que: (1) o pensamento intuitivo é pré-consciente ao nível da aquisição e do processamento de informação e o pensamento analítico é consciente ao nível da aquisição, selecção e processamento de informação; (2) enquanto o pensamento intuitivo envolve uma compreensão por sentimento e instinto de empatia, o pensamento analítico envolve um raciocínio puramente intelectual ou lógico, independente de disposições temporárias e fisiológias; (3) enquanto no pensamento intuitivo o processamento de um campo global de conhecimento é repentino, sintético e paralelo, já no pensamento analítico a actividade cognitiva é sequencial, linear e ordenada passo-por-passo; (4) no pensamento intuitivo o problema é tratado como um todo, no pensamento analítico há uma separação dos detalhes da informação; (5) enquanto o pensamento intuitivo depende da experiência pessoal, o pensamento analítico é dela independente; (6) o pensamento intuitivo socorre-se de metáforas pictóricas, enquanto o pensamento analítico socorre-se de padrões conceptuais ou numéricos; (7) no pensamento intuitivo há um baixo controlo cognitivo e no pensamento analítico há um alto controlo cognitivo; (8) o pensamento intuitivo é acompanhado de envolvimento emocional, embora sem ansiedade, enquanto o pensamento analítico é uma actividade livre de emoções; e (9) o produto do pensamento é acompanhado de um sentimento de certeza no pensamento intuitivo e no pensamento analítico é acompanhado de um sentimento de incerteza.

Para Scholz (1987) esta lista de atributos do pensamento intuitivo e analítico são construtos multidimensionais que permitem contrastar formas de actividade cognitiva. Segundo este autor, o pensamento estocástico não ocorre apenas nas formas ideais de pensamento intuitivo e analítico, admitindo a existência de outras formas de pensamento intermédio, casos não classificáveis e formas de pensamento diversas das anteriores. Apesar das suas limitações, esta definição através de listas de atributos tem um duplo propósito: fornecer uma descrição teórica mais completa e mais diferenciada dos modos de pensamento e proporcionar um procedimento fiável e empiricamente acessível para classificar modos de pensamento.

Para Kahneman e Tversky (1982), os termos intuição e intuitivo são usados com três sentidos diferentes. No primeiro, um julgamento intuitivo é obtido através de um raciocínio informal e não estruturado, sem recurso a métodos analíticos ou cálculos deliberados. No segundo, uma regra formal ou um facto da natureza é intuitivo quando é compatível com a nossa visão de iniciado do mundo. No terceiro, uma regra ou procedimento faz parte do repertório das intuições quando é aplicado na nossa conduta normal.

Considerando as dicotomias estratégias algébricas *versus* não algébricas e estratégias analíticas *versus* intuitivas, Kahneman e Tversky (1982) propõem que, em problemas de julgamento probabilístico, o pensamento analítico implica cálculos algébricos e o pensamento intuitivo implica um processamento não algébrico. Todavia, segundo Scholz (1987), os cálculos algébricos constituem apenas um dos atributos da caracterização do pensamento analítico *versus* intuitivo. Além disso, segundo este autor, sabe-se que em matemática as operações algébricas são algumas vezes aplicadas a um nível pré-consciente e de forma intuitiva. Portanto, será de esperar que existam estratégias intuitivas algébricas e estratégias analíticas não algébricas.

Admitindo que as estratégias intuitivas, fundamentalmente, não se baseiam em operações algébricas, enquanto que as estratégias analíticas são frequentemente acompanhadas de operações algébricas, Scholz (1987) conduziu um estudo no contexto dos julgamentos probabilísticos através de problemas de palavras. Desse estudo, verificou-se que mais de dois terços dos sujeitos usaram estratégias não algébricas, metade das quais se inseriram num pensamento analítico e a outra metade num pensamento intuitivo. Conclui-se, assim, que muitos sujeitos adoptaram uma estratégia analítica não algébrica, mas, diferentemente, apenas dois sujeitos, num total de 118 sujeitos, recorreram a uma estratégia intuitiva algébrica.

Segundo Fischbein (1987), a actividade mental apenas é possível na medida em que confiamos automaticamente em factos existentes, objectivos e inquestionáveis, tal como acontece na actividade do dia-a-dia. Neste sentido, este autor, afirma:

> "A nossa teoria é que o comportamento mental (raciocínio, resolução, compreensão, previsão, interpretação), incluindo a actividade matemática, está sujeita aos mesmos constrangimentos fundamentais. *Os "objectos" mentais (conceitos, operações, afirmações) devem adquirir um tipo de consistência intrínseca e evidência directa semelhante ao dos objectos materiais, reais e externos, se o processo de raciocínio é para ser uma actividade genuinamente produtiva*." (Fischbein, 1987, p. 21)

Em consequência, uma intuição é uma ideia que possui as propriedades fundamentais de uma realidade concreta e objectivamente dada: a imediaticidade, que significa evidência intrínseca, e a certeza, que significa, não a certeza formal convencional, mas a certeza imanente, significativamente prática.

Vendo as intuições como parte integrante da actividade regular de pensamento, Fischbein, afirma que:

> "durante um processo de raciocínio, temos de acreditar – pelo menos temporariamente (mas absolutamente) – nas nossas representações, interpretações ou soluções momentâneas, de outro modo o nosso fluxo de pensamentos paralisaria. É a este tipo de crença que chamamos intuição. Crenças cognitivas, elaboradas e confirmadas repetidamente pela prática, podem adquirir um carácter axiomático." (Fischbein, 1987, p. 28)

Para Fischbein (1987, 1990), as cognições intuitivas possuem um conjunto de características gerais que as distinguem de outros tipos de cognições, nomeadamente, a auto-evidência, a certeza intrínseca, a persistência, a coercividade, a condição teórica, a extrapolação, a globabilidade e a natureza implícita (Fischbein, 1987). Referimo-nos, seguidamente, a cada uma destas características.

A auto-evidência é a característica fundamental das intuições e significa que elas são auto-consistentes e auto-justificáveis ou auto-explicativas. Por exemplo, a afirmação de que 'O todo é maior que cada uma das suas partes estritas' é auto-evidente porque o conceito de todo implica a ideia de uma soma de partes.

Perceber algo evidente, significa apreender um invariante ao longo de manifestações potencialmente diferentes. Ao descobrir, analítica e tacitamente, o invariante no conceito, adquire-se o sentimento de evidência intrínseca de uma relação conectando o conceito com um atributo ou outro conceito.

O atributo da auto-evidência coloca duas questões didácticas fundamentais: a primeira consiste em decidir se é possível e útil determinar um procedimento didáctico para complementar a compreensão formal com um *insight* directo do conceito ou da afirmação; a segunda, consequência de uma resposta afirmativa à primeira, consiste em descobrir um método adequado para criar um tal sentimento de evidência no estudante.

As origens da auto-evidência têm de ser identificadas na significação directa comportamental, ao alcançar um invariante ao longo das várias transformações de uma dada estrutura, no equilíbrio destas transformações e no carácter analítico de uma afirmação auto-evidente.

A auto-evidência de uma proposição matemática levanta ainda outro problema didáctico na medida em que inibe a necessidade de uma demonstração explícita dessa proposição (Fischbein, 1990; Sebastião e Silva, 1968/69).

A certeza intrínseca inerente a estas cognições, é uma outra característica fundamental das intuições. Muito embora a auto-evidência e a certeza intrínseca estejam altamente correlacionadas, qualquer delas não é redutível à outra. Observe-se que há muitas situações em matemática que não são auto-evidentes e, apesar disso, as pessoas estão convictas acerca da sua veracidade. Neste caso, a convicção pode estar na base de uma demonstração. Há ainda outras situações que são auto-evidentes e, em virtude da sua complexidade, as pessoas não estão convictas de que as suas soluções sejam realmente correctas.

Em relação ao último caso, Fischbein, Tirosh e Melamed (1981) consideraram um segmento de recta $[AB]$ e sobre ele escolheram, ao acaso, um ponto C. Dividiram o segmento de recta dado em duas partes iguais e, seguidamente, dividiram novamente cada uma das partes obtidas em duas partes iguais. Continuando com este processo de divisão sucessiva, será que chegamos a um momento em que um dos pontos da divisão é exactamente o ponto C? Confrontados com esta situação, observou-se que os sujeitos exibiram um *score* alto em relação à evidência e um *score* muito baixo na confiança.

É claro, actualmente, que o sentimento de certeza não é um critério absoluto da verdade objectiva, pois as pessoas manifestam níveis de confiança elevados em intuições erradas. Neste caso, por exemplo, Fernandes (1990) verificou, num estudo em que os sujeitos responderam a várias situações contra-intuitivas do domínio das probabilidades, depois de codificada a confiança nas respostas correctas e erradas em 'pouco confiante' e 'muito confiante', que não houve diferenças entre a confiança nas respostas correctas e a confiança nas respostas erradas.

O facto de as pessoas depositarem uma elevada confiança nas suas intuições erradas questiona profundamente a tese de Descartes (1989), ao considerar a intuição como critério de validade da verdade. Já em termos didácticos, a confiança excessiva nesta categoria de ideias erradas coloca problemas complexos na medida em que elas se tornam difíceis de eliminar.

Uma vez estabelecidas, as intuições são muito persistentes e tenazes, o que constitui outra das suas características. O ensino formal centrado na aquisição de conhecimento conceptual tem um impacto muito reduzido no substrato intuitivo do aprendiz. No estudo já referido, Fernandes (1990) observou, em relação a situações contra-intuitivas de probabilidades, que o ensino de probabilidades não foi suficiente para diferenciar os sujeitos que tinham passado por um tal ensino em relação aqueles que não tinham passado por qualquer ensino de probabilidades, no que respeita ao erro cometido no conjunto de todas as questões apresentadas.

O facto de as intuições erradas persistirem conjuntamente com interpretações conceptuais correctas constitui uma fonte de dificuldade permanente face à aprendizagem do saber normativo que a escola deve promover.

Uma outra característica das intuições é a acção coerciva que elas exercem na actividade de raciocínio das pessoas. As intuições impõem-se aos indivíduos como verdades obrigatórias e como proposições que não podem ser substituídas pelas suas contrárias. Aceitamos intuitivamente, por exemplo, que 'Por um ponto exterior a uma recta podemos desenhar uma e uma só recta paralela à recta dada', isto na geometria euclidiana. Já na geometria hiperbólica, não podemos aceitar intuitivamente que podemos desenhar uma infinidade de rectas paralelas (Fischbein, 1987).

No desenvolvimento da matemática a coercividade das intuições tem contribuído para a manutenção de interpretações erradas e dificultado a aceitação de outras correctas, mesmo depois de terem sido provadas logicamente. A sua acção pode também ser vista no grau de convicção imanente de um pensamento intuitivo e aquele que deriva de uma demonstração. No caso da demonstração, se concluirmos que uma afirmação não é verdadeira, não é difícil, subjectivamente, renunciar à nossa convicção. Já no caso da convicção intuitiva, ela não é facilmente erradicada, pois as intuições fazem parte dos nossos esquemas mentais e, geralmente, não são concepções mentais isoladas. Antes, elas exprimem constrangimentos mentais organizados em estruturas compreensivas que orientam o nosso modo de viver e o nosso comportamento (Fischbein, 1990).

A condição teórica de uma intuição significa que ela não é um *skill* ou a percepção de um dado facto. Numa intuição, geralmente, atinge-se a universalidade de um princípio, de uma relação ou de uma lei, enquanto invariante de uma realidade particular. Assim, por exemplo, a intuição da igualdade geométrica dos ângulos verticalmente opostos determinados por duas rectas concorrentes não significa que a propriedade seja aceite num caso particular, com base num desenho. Diferentemente, ela é aceite na sua generalidade.

O estatuto teórico de uma intuição também não significa que seja uma teoria pura. Antes, é uma teoria expressa numa representação particular, socorrendo-se de um paradigma, de uma analogia, de um diagrama ou de um construto mental.

O carácter extrapolativo de uma intuição implica que ela excede os dados disponíveis. No caso do postulado das paralelas de Euclides, a sua evidência intuitiva extrapola uma experiência muito limitada ao infinito, pois o que podemos observar é apenas o paralelismo de dois segmentos de recta. Contudo, estamos convictos que os prolongamentos indefinidos dos segmentos de recta não se intersectam (Fischbein, 1990).

O carácter global de uma intuição significa que se trata de uma cognição estruturada que oferece uma visão global e unitária de uma certa situação, à semelhança do que acontece no conceito de Gestalt.

Finalmente, na natureza implícita de uma intuição estabelece-se a assunção que as reacções intuitivas são a expressão superficial da estrutura de mecanismos e processos subjacentes tácitos, que actuam de modo inconsciente.

Segundo Chui (1996), as intuições diferem dos conceitos formais em seis aspectos: origem, suporte social, estrutura interna, explicação, sistemacidade e justificação. Comparando as características dos conceitos formais *versus* intuições, tem-se: (1) origem nas pessoas enquanto peritos *versus* origem nas pessoas em geral; (2) suporte no professor *versus* pouco ou nenhum suporte social; (3) estrutura interna analítica *versus* estrutura interna holística; (4) explicação precisa *versus* explicação relativamente desarticulada; (5) sistematicidade densamente conectada *versus* dispersamente conectada; e (6) justificação baseada na sistematicidade e na autoridade *versus* justificação baseada na experiência pessoal. Sintetizando, Chiu define a intuição como "um conceito holístico auto-evidente que é relativamente desarticulado e escassamente conectado, com origem e justificação na experiência da pessoa." (Chiu, 1996, p. 480)

Centrando-se na ligação entre as intuições, o mesmo autor avança quatro perspectivas teóricas. Na primeira perspectiva, designado por 'vácuo virtual', sustenta-se que cada comportamento é essencialmente separado dos outros. Nesta perspectiva, perante um problema novo, os sujeitos apenas podem produzir palpites ao acaso, pois não dispõem de qualquer base que lhes permita efectuar uma escolha entre os seus conhecimentos prévios. Nesta perspectiva, preconizada por Gagné (1970), sustenta-se uma aprendizagem de comportamentos hierarquizados em que cada tarefa é dividida em sub-tarefas pré-requisito de modo a se atingirem comportamentos atómicos que o professor ensina directamente. Em relação aos conhecimentos prévios, eles podem ser integrados noutros comportamentos mais complexos, de modo seguro, ignorando aqueles que são irrelevantes.

Na segunda perspectiva, argumenta-se que os alunos generalizam de experiências comuns para criar fragmentos de informação hierárquicos e dispersamente conectados. Apesar de as pessoas poderem responder inconsistentemente a questões não familiares, elas usam um conjunto limitado de intuições, em contraste com a variedade infinita de palpites na perspectiva de Gagné.

Na terceira perspectiva, propõe-se uma ordenação dimensional sistemática das intuições acerca de forças, tais como vigor relativo e resultado. Apesar de uma pessoa poder inicialmente responder incorrectamente, mover-se-á para um resultado final predizível ao longo das dimensões conhecidas, diferentemente das perspectivas anteriores não predizíveis.

Finalmente, na quarta perspectiva, argumenta-se que os alunos constróem teorias intuitivas sistemáticas. Nesta perspectiva, a intuição é um sistema coerente no qual o raciocínio flui com regularidade e não ressalta de um fragmento de conhecimento para outro. Consequentemente, as pessoas ao usarem intuições responderiam a questões de forma predizível e consistente, embora possivelmente de forma incorrecta.

Depois de ter conduzido um estudo em que se pediu a 16 alunos, de 12 a 14 anos de idade, que comparassem os comprimentos de vários caminhos constituídos por segmentos de recta, Chui (1996) observou que os sujeitos recorreram a quatro intuições – ‘compressão’, ‘desvio’, ‘complexidade’ e ‘rectidão’ – e a um algoritmo analítico – ‘alinhar-e-comparar’. Em geral, principalmente no início, os sujeitos não recorreram a um algoritmo analítico, tal como ‘alinhar-e-comparar’. Em vez disso, invocaram conceitos imediatos, holísticos e auto-evidentes que não estavam regularmente integrados.

Em relação ao comportamento de resolução de problemas destes alunos, eles apoiaram três pretensões teóricas a respeito do uso de intuições: (1) utilizar intuições familiares em novas situações, (2) voltar a utilizar intuições inadequadas e (3) falhar em aplicar de novo intuições anteriormente bem sucedidas. Além disso, eles não aplicaram sistematicamente cada intuição a cada comparação de caminhos. Diferentemente, ao saltarem de uma intuição para outra ao compararem caminhos, estes alunos revelaram a natureza fragmentada do uso da intuição através do seu extremamente limitado campo de aplicação.

Numa segunda sessão de problemas, que decorreu após uma primeira sessão em que lhes foi explicitado (se necessário) o algoritmo 'alinhar-e-comparar', os estudantes voltaram a não aplicar de imediato esse algoritmo. Assim, apesar dos fracassos passados das suas intuições, elas revelaram uma alta prioridade de acessibilidade mental, comparativamente com o algoritmo. O algoritmo foi aplicado apenas depois das suas robustas intuições se terem revelado de novo inadequadas.

Em síntese, o autor concluiu que as intuições parecem ser fragmentos de informação dispersamente conectados. Por um lado, o número limitado de intuições e a sua utilização repetida sugere que estas não são palpites feitos ao acaso, eliminando-se, assim, a perspectiva do vácuo virtual. Por outro lado, a utilização inconsistente de intuições particulares e as suas frequentes vacilações também contradizem as perspectivas 'dimensionalmente estruturada' e 'firmemente entrelaçada' que predizem uma solução final estável. Além disso, o uso de intuições e do algoritmo 'alinhar-e-comparar' apoiam a investigação que argumenta que as intuições coexistem com conhecimento matemático formal.

O facto de as vacilações manifestadas pelos sujeitos indicarem ausência de relações sistemáticas entre as intuições, revela alguma divergência em relação à caracterização das intuições de Fischbein (1987, 1990), designadamente, ao afirmar que não se trata de cognições isoladas, antes organizam-se em estruturas mentais que exercem uma influência coerciva sobre as pessoas.

Referindo-se à utilidade das intuições, em termos do processo de passagem de aprendiz a perito, Chui (1996) advoga a articulação de conexões entre os seus fragmentos de informação. Nesse sentido, os estudantes podem explorar intuições cuidadosamente seleccionadas como alicerces para os conceitos formais, devem examinar a sua amplitude de aplicação e heuristicamente ligá-las à matemática formal.

2.1.3. Classificações das intuições

Na invenção da matemática, segundo Poincaré (1932), os matemáticos socorrem-se de diferentes tipos de intuições. Para tal, apelam (1) aos sentidos e à imaginação, (2) a generalizações indutivas, à imagem dos processos das ciências experimentais, e (3) à intuição do número puro. Muito embora para Poincaré (1932) as intuições não garantam o rigor nem a verdade em matemática, ele salienta que a intuição do número puro, ao fundamentar a indução matemática, pode gerar a verdade do raciocínio matemático.

Piaget e Beth (1980) distinguem várias dicotomias possíveis nas intuições. Na primeira dicotomia, distinguem-se as intuições empíricas das intuições operacionais. As intuições empíricas referem-se a propriedades físicas dos objectos (por exemplo, a intuição de peso de um objecto) ou a propriedades psicológicas proporcionadas pela experiência introspectiva vivida (por exemplo, a intuição da duração vivida com independência de toda a operação temporal). As intuições operacionais são vinculadas a acções ou operações, referindo-se a objectos ou desligando-se deles mais ou menos completamente (por exemplo, as intuições de ordem e de correspondência um a um).

As intuições operacionais, que são as que têm interesse do ponto de vista matemático, ainda se classificam em geométricas, que são acompanhadas por imagens de natureza homogénea, e operacionais referentes a elementos discretos, que não possuem tal propriedade. Enquanto nas intuições geométricas há uma congruência completa entre a imagem e o conceito (por exemplo, a imagem de círculo e o conceito de círculo), nas intuições envolvendo operações com objectos discretos a imagem e a operação mantêm-se essencialmente heterogéneas (por exemplo, imagens de objectos sobre os quais se efectua uma classificação e a própria operação como processo lógico).

Referindo-se ainda às intuições operacionais, sugere-se uma distinção mais geral entre intuições pictóricas, que se exprimem por imagens, e intuições operacionais em sentido estrito, que se referem a conceitos lógico-matemáticos.

Considerando que cada uma das diferentes categorias de intuições distinguidas apresenta as suas próprias leis de evolução, Piaget e Beth (1980) referem que as intuições empíricas evoluem em função dos progressos da experimentação. Já quanto às intuições operacionais em sentido estrito, elas competem com os mecanismos da inteligência, passando por três grandes estádios de desenvolvimento: intuições vinculadas à acção material sobre os objectos, seguindo-se o vínculo à acção interiorizada em operações (ainda por referência aplicável aos objectos) e, por fim, o vínculo a operações independentes de toda a acção possível.

O papel das intuições do ponto de vista cognoscitivo, apesar de desempenhar um papel efectivo ao longo dos diferentes níveis, vai diminuindo ao longo do desenvolvimento intelectual. Neste sentido, as intuições empíricas dão lugar ou submetem-se às técnicas de experimentação estrita, as intuições operacionais subordinam-se cada vez mais às intuições operacionais em sentido estrito, e estas últimas desenvolvem-se graças ao mecanismo de abstracção reflexiva, refinando incessantemente as técnicas dedutivas e limitando cada vez mais o domínio da própria intuição.

Numa perspectiva mais ampla, Fischbein (1987) classifica as intuições com base nos seus papeis e nas suas origens. Segundo os seus diferentes papeis, as intuições classificam-se em afirmativas, conjecturais, antecipadoras e conclusivas.

As intuições afirmativas "são representações ou interpretações de vários factos aceites como certos, auto-evidentes e auto-consistentes" (Fischbein, 1987, p. 58). Estas intuições ainda se podem subdividir, segundo Fischbein, em semânticas, referindo-se ao significado dos conceitos; relacionais, envolvendo relações, e inferenciais, justificando generalizações empíricas, no sentido da intuição empírica referida por Poincaré (1932), ou estruturas dedutivas, relacionadas com inferências lógicas.

As intuições conjecturais "exprimem pela sua natureza uma assunção acerca de acontecimentos futuros, acerca do progresso de um certo fenómeno, etc." (Fischbein, 1987, p. 60).

As intuições antecipadoras e conclusivas representam duas categorias de intuições implicadas na resolução de problemas. As intuições antecipadoras "representam a visão preliminar e global que precede a solução analítica detalhada de um problema" (Fischbein, 1987, p. 61). Comparativamente com as intuições afirmativas, que representam uma atitude cognitiva estável em relação a uma situação mais geral e comum, as intuições antecipadoras surgem como uma descoberta, como uma solução para um problema e como o resultado súbito de um esforço prévio de resolução. Em relação às intuições conjecturais, que constituem avaliações e previsões geralmente não incluídas numa actividade de resolução sistemática, as intuições antecipadoras representam uma fase no processo de resolução de um problema, seguido por um esforço de demonstração analítica.

Finalmente, as intuições conclusivas sintetizam as ideias básicas da solução de um problema, previamente determinada, numa visão global e estruturada.

Em relação à origem das intuições, Fischbein, Barbat e Mînzat (1975) e Fischbein (1975, 1987) classificam-nas em primárias e secundárias.

As intuições primárias "referem-se àquelas crenças cognitivas que se desenvolvem nos indivíduos independentemente de qualquer instrução sistemática e em resultado da sua experiência pessoal" (Fischbein, 1987, p. 64). Na perspectiva de Piaget, estas intuições podem classificar-se, ainda, em pré-operacionais e operacionais. Porém, considerando que, na terminologia de Piaget, a palavra intuição se refere a tudo o que não é formal, Fischbein advoga que existem cognições operacionais que não são intuitivas e que as intuições não desaparecem no estádio das operações formais.

A categoria das intuições secundárias, pressupõe a possibilidade de podermos desenvolver novas intuições, com origem não natural. Estas intuições não resultam da experiência normal e natural do indivíduo e, frequentemente, contradizem as intuições primárias em relação à mesma questão. Referindo-se ao princípio da inércia, de difícil aceitação natural, Fischbein afirma que se uma “interpretação puder transformar-se de uma concepção aprendida numa crença, então podemos referimo-nos a ela como uma intuição secundária” (Fischbein, 1987, p. 68).

2.2. Diferentes perspectivas do conceito de probabilidade

O conceito de probabilidade é um conceito de carácter multifacetado que pode ser visto de diferentes perspectivas. Segundo Hacking (1975), ao longo do tempo, o conceito de probabilidade tem assumido um carácter essencialmente dual: por um lado, a probabilidade é estatística na medida em que se liga com leis estocásticas de processos do acaso – ponto de vista objectivista – e, por outro lado, é epistemológica na medida em que avalia graus de crença em proposições desprovidas de fundamento estatístico – ponto de vista subjectivista.

Hawkins e Kapadia (1984) e Orton (1988) distinguem quatro conceitos de probabilidade: (1) o conceito clássico, (2) o conceito frequencista ou empírico, (3) o conceito subjectivista e (4) o conceito axiomático ou formal. Numa classificação ligeiramente diferente, Borovcnik, Bentz e Kapadia (1991) distinguem também quatro conceitos de probabilidade: (1) o conceito clássico, (2) o conceito frequencista ou empírico, (3) o conceito subjectivista e (4) o conceito estrutural. Enquanto que os conceitos clássico, frequencista e subjectivista coincidem nas várias classificações, na classificação de Borovcnik, Bentz e Kapadia, o conceito estrutural engloba a axiomatização do ponto de vista objectivista e subjectivista.

Seguidamente, iremos analisar mais detalhadamente cada um dos diferentes conceitos de probabilidade identificados por Borovcnik, Bentz e Kapadia (1991).

2.2.1. Conceito clássico

Nesta perspectiva, atribuem-se probabilidades a acontecimentos com base na definição clássica de probabilidade, devida a Laplace. Assim, a probabilidade de um acontecimento composto é a fracção de acontecimentos elementares favoráveis a esse acontecimento no espaço amostral.

Nesta definição de probabilidade assume-se implicitamente a equiprobabilidade de todos os acontecimentos elementares do espaço amostral e constitui uma abordagem *a priori* da probabilidade, pois calculam-se probabilidades antes da realização de qualquer experiência física. Naturalmente, o pressuposto da igual probabilidade dos acontecimentos elementares revela o carácter circular desta definição de probabilidade. No sentido de evitar esta circularidade, Laplace instituiu como critério o 'princípio da insuficiente razão', princípio algo obscuro, que permitia afirmar a equiprobabilidade desde que não existissem razões para acreditar que um ou mais acontecimentos seriam mais prováveis de obter em relação aos demais. Para Falk (1992), noções como o 'princípio da insuficiente razão', o 'princípio da igual ignorância' e o 'princípio da indiferença' podiam reflectir uma preferência básica pela simetria e pela equidade.

Em contextos práticos somos confrontados com o problema de decidir quais são os acontecimentos elementares que são igualmente prováveis. Nestas situações, a simetria da experiência física e a adopção do 'princípio da insuficiente razão' constituem orientações instáveis que nos podem ajudar. Todavia, a dificuldade não é resolvida, pois uma mesma experiência física pode revelar diferentes simetrias.

Para Hawkins e Kapadia (1984), a concepção errada de que no lançamento de um dado é mais difícil obter o número 6 do que qualquer outro número, desenvolvida nos jogos de sorte-azar que estabelecem a obtenção do número 6 como condição para o jogador começar a jogar, dificilmente é vencida dizendo simplesmente à criança que a probabilidade de obter qualquer face do dado é 1/6. Em alternativa, esta concepção, consolidada pelo facto de algumas vezes o jogador ter de esperar muito tempo até lhe sair o número 6, pode ser questionada e ultrapassada mais eficazmente através de uma abordagem frequencista ou subjectivista. Estas abordagens mantêm-se ainda eficazes para outras concepções erradas.

2.2.2. Conceito frequencista ou empírico

No conceito frequencista ou empírico, a probabilidade de um acontecimento resulta da frequência relativa observada desse acontecimento em experiências repetidas. Este procedimento não permite obter a probabilidade exacta do acontecimento, mas apenas uma sua estimativa. Naturalmente que estamos, nesta perspectiva, face a uma abordagem da probabilidade *a posteriori*, pois atribuem-se as probabilidades depois das experiências se terem realizado.

A probabilidade é atribuída a um acontecimento individual inserido num colectivo, que é uma classe infinita de acontecimentos 'semelhantes' que se assume terem certas propriedades 'aleatórias'. Então, a probabilidade é o limite para que tende a frequência relativa.

Para Borovcnik, Bentz e Kapadia (1991) a aplicação prática desta definição de probabilidade envolve também dificuldades, tal como a definição clássica. Uma das dificuldades resulta da possibilidade de inserir um acontecimento individual em diferentes colectivos, não garantindo o mesmo limite para a frequência relativa. Outra, advém da dificuldade em definir o que se entende por 'semelhante' e por 'aleatório'.

Matalon (1980) adopta um critério de objectividade mais restrito, ao identificar a escola 'objectivista' com a escola 'frequencista'. Assim, não se referindo à escola axiomática, fundada por Kolmogorov, e ao acusar a escola clássica de circularidade, para Matalon não tem qualquer sentido falar da probabilidade de um acontecimento por natureza único.

Além da limitação inerente à perspectiva frequencista para lidar com situações em que não se pode repetir a experiência, referida por Matalon, Hawkins e Kapadia (1984) destacam ainda as dificuldades inerentes ao infinito e a necessidade de distinguir a probabilidade teórica da probabilidade prática.

2.2.3. Conceito subjectivista

Enquanto nas duas perspectivas anteriores as probabilidades são propriedades do mundo real que nos rodeia, na perspectiva subjectivista, também designada por personalista, as probabilidades são avaliações de situações de incerteza inerentes à mente do sujeito. Passa-se, assim, de uma avaliação exterior ao sujeito para uma avaliação centrada no sujeito. Neste sentido, as perspectivas clássica e frequencista são referidas como interpretações objectivistas de probabilidade.

Nesta perspectiva, a atribuição de probabilidades baseia-se na assunção básica de que os sujeitos têm as suas próprias probabilidades que resultam de um padrão implícito de preferência entre decisões. Num contexto de jogos de sorte-azar, a probabilidade de um acontecimento pode ser determinada pelos riscos que uma pessoa está disposta a correr ao fazer uma aposta na sua ocorrência. Assim, para um ganho fixo, quanto mais elevada for a parada que o jogador está disposto a arriscar maior será a sua confiança na realização do acontecimento. Muito embora as pessoas possam diferir nos riscos que aceitariam correr, tal não constitui problema, dado que o sujeito segue regras básicas de coerência e consistência.

As duas categorias de informação que um subjectivista considera, a informação prévia e os dados empíricos que equivalem a frequências em provas repetidas, são combinadas na fórmula de Bayes para obter uma nova probabilidade do acontecimento em questão, consubstanciando o conceito de 'aprendizagem a partir da experiência' (Steinbring & von Harten, 1982).

No caso da concepção errada de que é mais difícil obter o número 6 do que qualquer outro número no lançamento de um dado, Hawkins e Kapadia (1984) advogam que 100 lançamentos do dado, em que a criança é forçada a apostar, devem constituir um meio de dissuadir a criança a abandonar tal concepção. Nesta abordagem, diferentemente da abordagem frequencista, o recurso a ideias subjectivas permite alterar e actualizar uma probabilidade desde que seja adquirida nova informação.

Segundo Borovcnik, Bentz e Kapadia (1991), as duas maiores dificuldades inerentes à abordagem subjectivista resultam da pretensão em traduzir qualquer situação de incerteza por uma probabilidade e da falta de orientação para medir as probabilidades prévias. Além disso, Hawkins e Kapadia (1984) salientam as dificuldades pedagógicas no ensino da fórmula de Bayes, particularmente em crianças muito novas.

2.2.4. Conceito estrutural

A probabilidade formal é um conceito definido implicitamente por um sistema de axiomas e um conjunto de definições e teoremas deduzidos daqueles axiomas. Esta abordagem estrutural não clarifica a própria natureza da probabilidade, apesar de os teoremas deduzidos constituírem um indicador de possíveis interpretações.

A perspectiva estrutural pode ser vista como constituindo uma estrutura teórica para as duas principais concepções de probabilidade: a posição objectivista e a posição subjectivista. No primeiro caso, os axiomas de Kolmogorov são usualmente vistos como justificação da posição objectivista. No segundo caso, os axiomas sobre o comportamento racional no acto de apostar, como coerência e consistência, fornecem regras para as probabilidades, as quais devem obedecer aos axiomas de Kolmogorov e suas consequências (Hawkins & Kapadia, 1984).

Segundo Matalon (1980), deve-se a Savage a definição mais completa do comportamento racional. Para tal, Savage caracteriza as escolhas do indivíduo racional através de sete axiomas, dos quais se apresentam dois a título de exemplo:

> (A1) O indivíduo é capaz de ordenar completamente os actos segundo as preferências que tem por eles;
> (A2) Também chamado o axioma da 'coisa segura', diz que se para cada estado da natureza o indivíduo prefere a consequência do acto *a* à do acto *b*, então ele continuará a preferir *a* a *b*, desde que ignore qual dos dois estados se produzirá.

Para Borovcnik, Bentz e Kapadia (1991) a perspectiva estrutural não é útil na determinação de um valor para a probabilidade. Em consequência, em qualquer caso de aplicação prática, temos de escolher uma interpretação subjectiva ou objectiva para determinar o modelo e a probabilidade inerentes à situação.

2.3. O conceito de probabilidade e intuições probabilísticas

Nesta secção apresentam-se várias perspectivas sobre o desenvolvimento do conceito de probabilidade, identificando-se e caracterizando-se intuições ao longo desse desenvolvimento. Concretamente, referimo-nos às perspectivas, quer de Piaget e

Inhelder e de Fischbein, quer de processamento de informação e às heurísticas de julgamento probabilístico. Apresenta-se, ainda, um estudo em larga escala efectuado por David Green na Inglaterra no início da década de 80.

2.3.1. Perspectiva de Piaget e Inhelder

Para Piaget, o conceito de probabilidade, tal como acontece com outros conceitos por ele estudados, desenvolve-se segundo uma sequência hierárquica de estádios. Estudando o desenvolvimento das probabilidades em estreita ligação com a ideia do acaso e das operações dedutivas, Piaget e Inhelder (s/d) e Inhelder (1977) estabeleceram três estádios fundamentais: (1) o estádio I, que ocorre antes dos 7-8 anos; (2) o estádio II, que ocorre entre os 7-8 anos e os 11-12 anos; e (3) o estádio III, com início a partir dos 11-12 anos e completando-se por volta dos 14-15 anos.

Estádio I (antes dos 7-8 anos). Durante o primeiro estádio, a criança não distingue o possível do necessário. O seu pensamento oscila entre o previsível e o imprevisível, nada sendo seguramente previsível, em consequência da necessidade, nem seguramente imprevisível, em consequência do acaso. A não existência de qualquer diferenciação entre o possível e o necessário explica-se pelo facto de a criança não possuir uma ideia do acaso consistente nem operações dedutivas.

O imprevisto é concebido como expressão do capricho, da fantasia e do arbitrário, sendo interpretado de modo psicológico ou motivacional e não numa dimensão lógica ou física do não componível e do irreversível. Em consequência, para Piaget e Inhelder, explica-se que a criança procure encontrar na desordem, que considera apenas aparente, uma ordem oculta qualquer baseada nas semelhanças dos elementos, dos seus arranjos antes da mistura, etc.; que não compreenda a irreversibilidade inerente aos processos fortuitos, a qual implica a não composição aditiva e a não dedutibilidade dos processos aleatórios; que faça previsões de casos fortuitos isolados com base em semelhanças, na ordem inicial, na maior frequência observada e na compensação, mantendo esta última um carácter subjectivo e egocêntrico; que não sinta a necessidade de simetria entre valores opostos, no caso de uma dispersão centrada num valor médio; que não associe um raciocínio indutivo aos julgamentos baseados na frequência, pois um raciocínio indutivo consiste precisamente em separar o que é regular do que é fortuito; que não se surpreenda com "milagres" que consistem na observação sistemática do mesmo resultado, em consequência do uso de fichas iguais dos dois lados ou da colocação de um íman numa roleta; que não quantifique as probabilidades em virtude da ausência de encaixes operatórios; e que não exiba qualquer raciocínio relativo à dispersão com conjuntos de grandes números.

Estádio II (7-8 aos 11-12 anos). No segundo estádio, a criança descobre o acaso a título de realidade incomponível, por antítese com as operações. Durante este período, as intuições espaço-temporais e lógico-aritméticas dão lugar a operações reversíveis e componíveis, organizando-se em grupos ou agrupamentos bem definidos. É por antítese a estas operações que o acaso adquire uma significação de realidade incomponível e irreversível.

A criança deste período é capaz de reunir A e A' sob a forma $A + A' = B$ e pensar em A e A' a partir das operações inversas – $A = B - A'$ e $A' = B - A$; compreende que a disjunção concreta – se x pertence a B, x pertence a A ou x pertence a A' – implica simultaneamente o necessário – x pertence a B, x pertence necessariamente a A ou a A' – e o possível – se x pertence a B, x pode pertencer a A, mas também é possível que pertença a A'; dissocia o possível do necessário através da descoberta da indeterminação do acaso, por oposição à determinação operatória; inventaria as várias possibilidades através de processos aditivos, isto é, por encaixes de classes parciais numa classe total; tem consciência do "milagre" e compreende globalmente a ideia de mistura, a irreversibilidade dos mecanismos aleatórios, a compensação entre casos isolados e a simetria nas distribuições centralizadas, excepto para o caso dos conjuntos de grandes números.

Neste estádio, os encaixes operatórios simples tornam possíveis todos os julgamentos de probabilidade baseados na relação entre o todo e a parte, desde que um desses termos permaneça imutável.

Estádio III (11-12 aos 14-15 anos). No terceiro estádio, assiste-se à composição probabilística a partir da síntese do acaso e das operações dedutivas. Assim, o acaso é interpretado como se fosse, pelo menos em parte, componível e reversível, como se pudéssemos determiná-lo a partir de um sistema de operações incompletas e efectuadas sem ordem. Contribuem para uma tal interpretação, a composição probabilística, a intervenção do cálculo combinatório e as proporções. Agora, embora os casos isolados ou individuais sejam indeterminados ou imprevisíveis, o conjunto é determinável enquanto sistema de possibilidades múltiplas, consistindo a composição em ligar as partes (casos individuais reais) ao todo assim definido (conjunto dos casos possíveis).

Durante este estádio, a composição probabilística caracteriza-se pela estruturação das totalidades, levando à lei dos grandes números, e pela probabilidade dos casos isolados em função do conjunto. Por um lado, esta composição probabilística respeita o carácter incomponível e irreversível do acaso, na medida em que as diferentes possibilidades só se realizam no limite dos grandes números, mantendo-se o acaso efectivo indeterminado em graus diversos. Por outro lado, as operações combinatórias, que são componíveis e reversíveis, conferem à composição probabilística o carácter de uma determinação dedutiva das possibilidades como tais.

Conforme já foi referido antes, para Piaget o pensamento intuitivo é o tipo de pensamento que precede o formal, desenvolvendo-se, em consequência, durante os períodos pré-operacional e operacional concreto. No caso do conceito de probabilidade, referindo-se ao segundo estádio, Piaget e Inhelder afirmam:

> "... as verdadeiras intuições de probabilidade só então começam, mas precisamente em função de uma síntese operatória que subordina a previsão isolada à consideração de um sistema de conjunto de frequências. A elaboração de um sistema de distribuições é, pois, bem a condição psicológica prévia das intuições probabilísticas" (Piaget & Inhelder, s/d, p. 326).

O facto de a criança do período pré-operacional não possuir quaisquer intuições probabilísticas, confirma um desenvolvimento mais tardio, também ao nível intuitivo, do conceito de probabilidade em comparação com outros conceitos.

As conclusões de Piaget e Inhelder (s/d), apontando para um desenvolvimento tardio do conceito de probabilidade, cedo geraram um aceso debate e muita controvérsia. Segundo Hawkins e Kapadia (1984), levantaram-se questões a três níveis: (1) o estudo centrou-se no desenvolvimento espontâneo do conceito de probabilidade, não envolvendo qualquer mediação social nesse processo de desenvolvimento; (2) enfatizou-se uma abordagem formal do conceito de probabilidade, privilegiando-se o conceito clássico de probabilidade e as operações combinatórias; e (3) observou-se a ausência de um rigoroso controlo experimental.

Fischbein (1975) analisou uma grande variedade de estudos integrados no paradigma da 'aprendizagem de probabilidades', que se referem a uma situação na qual as respostas dos sujeitos são intermitente e aleatoriamente reforçadas, com uma frequência relativa particular. Por exemplo, na sua forma mais simples, um estudo deste tipo consiste em colocar em frente do sujeito duas lâmpadas de cor diferente e dois botões. Pode ter-se ainda uma terceira lâmpada usada como sinal de "prontidão". Uma vez que esta lâmpada acenda, o sujeito deve pressionar o botão correspondente à lâmpada da cor que previu que iria acender. Seguidamente, uma das lâmpadas acende-se, confirmando ou refutando a previsão feita. A experiência repete-se, observando-se estes passos, durante um elevado números de vezes, digamos uma ou duas centenas, agrupando-se em sequências de várias provas.

Nestas experiências, para uma certa probabilidade *input*, pretende-se avaliar em que medida as previsões do sujeito se vão aproximando do *nível input* com o decorrer da experiência. Segundo Fischbein (1975), nestes estudos foram considerados os aspectos: (1) o comportamento assimptótico e maximizante em função da idade, (2) o papel da recompensa e da punição, (3) o papel da instrução e (4) os efeitos recentes e a análise sequencial.

Dos resultados obtidos, Fischbein (1975) destaca os seguintes: (1) observa-se uma tendência para igualar a probabilidade *input* em todos os grupos etários estudados, antes mesmo dos 3 anos de idade; (2) a rapidez com que os sujeitos atingem o nível de probabilidade *input* aumenta com a idade e é atingido o mais tardar por volta dos 5-6 anos de idade; (3) a recompensa induz uma tendência de maximização que se torna mais forte com a idade; (4) há a tendência para respostas estereotipadas entre os 7 e os 9 anos de idade, particularmente a alternância de respostas, e depois dos 11 anos de idade as previsões são determinadas mais através de padrões extrapolados das sequências de acontecimentos anteriores; (5) as crianças mais velhas adoptam estratégias mais sofisticadas, baseadas em regras deterministas; (6) em crianças, o comportamento para igualar a probabilidade está sujeito à generalização do mesmo modo que no condicionamento clássico; (7) a instrução prévia sobre os conceitos do acaso e de probabilidade melhorou a realização dos sujeitos nas tarefas de aprendizagem de probabilidades.

Para Fischbein, o último resultado indicado "apoia a hipótese da existência de uma organização conceptual rudimentar subjacente ao comportamento de igualar a probabilidade *input* e ao comportamento probabilístico espontâneo em geral." (Fischbein, 1975, p. 57)

Por outro lado, pelo facto de os sujeitos não serem informados sobre o que se passa no interior dos aparatos utilizados nas experiências de aprendizagem de probabilidades, Scholz e Waller (1987) levantam dois problemas inerentes a este paradigma de investigação. Por um lado, o desvio da realização do sujeito, em relação à estratégia de resposta óptima, pode ser explicado pelo facto de ele não reconhecer a aleatoriedade da sequência de resultados, adoptando uma estratégia de resolução de problemas para descobrir e prever regularidades na sequência. Por outro lado, a hipótese de que a sequência é genuinamente aleatória justifica-se pelo facto de que nem todas as sequências são permitidas, mas apenas aquelas que dão a impressão do acaso, o que pode explicar a preferência em não seleccionar a alternativa mais frequente em todos os casos.

Falk, Falk e Levin (1980) conduziram um estudo com 36 crianças entre os 5 e os 11 anos de idade, envolvendo três tipos de objectos aleatórios estruturalmente equivalentes (urnas com bolas, roletas e rapas), contemplando três níveis diferentes de dificuldade (por referência à comparação de fracções de probabilidade) e sendo recompensada uma das duas cores dos aparatos. Surpreendidos pelo facto de crianças muito novas terem sido capazes de efectuar escolhas sistemáticas correctas, estes autores realizaram outro estudo com 25 crianças entre os 4 e os 7 anos de idade. Nesta segunda experiência, foram usados apenas roletas e foi controlado ainda o número de elementos da cor não recompensada.

Em ambos os estudos, no caso dos sujeitos mais novos, observou-se um nível de escolha da resposta correcta próximo da decisão ao acaso (52%), quando o número de elementos da cor recompensada era menor na escolha correcta. Os autores referem que "Esta baixa probabilidade de escolha reflecte não apenas um palpite acidental na ausência de um princípio de escolha, mas sobretudo uma escolha deliberada do conjunto que incluía mais elementos recompensados" (Falk, Falk & Levin, 1980, pp. 193-194).

Verificou-se, ainda, que o nível de dificuldade se repercutiu diferencialmente nos diferentes níveis escolares, diminuindo com a idade. Contudo, este efeito não foi tão dramático como o que resultou do número de elementos da cor recompensada.

Em geral, foram poucos os sujeitos em que se verificou coincidência do padrão de resposta ao longo de várias questões, resultando na ausência de coerência sistemática. Alguns dos princípios subjacentes às respostas eram mesmo irrelevantes, escolhendo-se, por exemplo, o objecto mais próximo, a roleta cujo ponteiro se localizava inicialmente na cor pretendida, o objecto situado no lado esquerdo porque se é esquerdino, o objecto mais bonito, a cor do clube de futebol preferido, etc.

Por volta dos 7-8 anos, alguns sujeitos (poucos) adoptaram um outro princípio errado, escolhendo a alternativa com menos elementos da cor não recompensada. Num estudo posterior, estes autores observaram que dois sujeitos, com idades à volta dos 7-8 anos, adoptaram a diferença entre o número de elementos das duas cores como critério de escolha. Neste caso, a integração aditiva, via cálculo da diferença, constitui uma alternativa à integração multiplicativa, via cálculo proporcional.

Em relação aos conceitos verbais de probabilidade, os resultados dos estudos mostraram que a capacidade de efectuar escolhas correctas precede claramente a capacidade verbal relativa aos mesmos problemas. Muitas crianças que tinham realizado quase perfeitamente ao nível das escolhas, experimentaram grandes dificuldades quando lhes foi pedida uma explicação das escolhas.

Por volta da idade dos 6 anos, assistiu-se a uma melhoria clara e abrupta da realização dos sujeitos, verificando-se que as crianças demonstraram uma realização a um nível superior ao acaso num conjunto de problemas críticos, envolvendo proporções. Para Falk, Falk e Levin (1980), a capacidade exibida pelos sujeitos mais novos pode ter uma origem fundamentalmente intuitiva, baseando-se em julgamentos perceptivos e não tanto em operações intelectuais bem estabelecidas.

2.3.2. Perspectiva de Efraim Fischbein

Para Fischbein (1975), o modelo dos estádios de desenvolvimento do conceito de probabilidade de Piaget e Inhelder (s/d) apresenta duas deficiências importantes. A primeira resulta do facto de resultados obtidos em estudos realizados no âmbito do paradigma da ‘aprendizagem de probabilidades’, particularmente nos anos sessenta, não poderem ser incluídos neste modelo. A segunda, reside na subestimação da importância do papel da instrução na formação do conceito de probabilidade.

Os estudos em ‘aprendizagem de probabilidades’ são da maior importância para o estudo de intuições probabilísticas nas crianças. A tendência para igualar a probabilidade *input*, não pressupondo qualquer sistema conceptual adequado, constitui, no entanto, um sinal da presença de esquemas comportamentais adaptados a condições estocásticas nos primeiros estádios de desenvolvimento, especificamente estádios pré-operacionais. Fischbein vê nesta tendência para igualar a probabilidade *input* a expressão de uma intuição particular, que designa por ‘intuição da frequência relativa’.

A compreensão pré-conceptual baseia-se em intuições primárias, que são um tipo de conhecimento implícito que se desenvolve espontaneamente em resultado da experiência do dia-a-dia da criança. Com o crescimento da criança, estas intuições primárias são sucessivamente transformadas num conceito operativo de probabilidade. Contudo, este processo não é espontâneo nem o resultado automático de um processo de auto-regulação do crescimento, antes é mediado por uma intervenção na escola. Para Scholz (1987), os resultados de investigação conhecidos apoiam fortemente a estratégia de Fischbein, ao preconizar que a aquisição de um conceito operatório de probabilidade implica o ensino às crianças de regras e estratégias do cálculo de probabilidades.

Segundo Scholz (1987), Fischbein concebe o desenvolvimento do conceito de probabilidade como um processo contínuo e Piaget e Inhelder concebem-no como um processo descontínuo. Na hipótese de continuidade, interpreta-se o processo de desenvolvimento do conceito de probabilidade como um processo de diferenciação progressiva em que os julgamentos probabilísticos subjectivos se tornam mais elaborados, culminando na substituição destes julgamentos por outros baseados em argumentos lógico-matemáticos (em relação ao conceito objectivista de probabilidade). O desenvolvimento descontínuo do conceito de probabilidade explica-se pela interpretação clássica do conceito de probabilidade, que foi adoptada por Piaget e Inhelder.

De modo semelhante a Scholz (1987), Hawkins e Kapadia (1984), referindo-se aos modelos de desenvolvimento cognitivo, referem que o trabalho de Piaget e Inhelder se centra em estádios de desenvolvimento conceptual, enquanto para Fischbein a cognição é fundamentalmente unitária, ou seja, é do mesmo tipo qualquer que seja o seu nível de aplicação.

Entre os inúmeros estudos realizados por Fischbein e seus colaboradores, iremos, seguidamente, referir-nos àqueles especialmente relacionados com a problemática discutida.

Fischbein, Barbat e Mînzat (1975) conduziram um estudo com alunos do 6º, 8º e 10º anos, de idades compreendidas entre os 12:5 (12 anos e 5 meses) e os 16:9 (16 anos e 9 meses) e sem qualquer ensino de probabilidades, usando um método de investigação que designaram por 'instrução por descoberta programada'. Este método, pensado para revelar intuições primárias dos sujeitos, consistia numa sequência de etapas estandardizadas, cada uma das quais começava com uma questão. Esperava-se que o sujeito desse uma resposta significativa, baseada na intuição ou em transferência. Todavia, se o sujeito não respondesse à questão eram formuladas outras questões, designadas por questões auxiliares. As situações probabilísticas foram apresentadas aos sujeitos, fundamentalmente, no contexto de urnas com berlindes. No caso das situações de transferência das leis da multiplicação e da adição recorreu-se ao contexto de um dado e de um armazém com dadas percentagens de maçãs verdes e maduras.

Os resultados do estudo mostraram o carácter intuitivo dos seguintes conceitos e procedimentos: (1) o conceito de acaso; (2) a quantificação do acaso como relação entre o número de resultados favoráveis e o número de resultados possíveis; (3) a atribuição do valor 1 à probabilidade do acontecimento certo e do valor 0 à probabilidade do acontecimento impossível; e (4) a probabilidade da reunião de acontecimentos mutuamente exclusivos é dada pela soma das probabilidades dos acontecimentos. Constatou-se, assim, que a definição clássica de probabilidade e os axiomas da teoria de probabilidades têm uma origem intuitiva.

Em relação à multiplicação de probabilidades, em experiências compostas, observou-se uma intuição rudimentar da redução das possibilidades, traduzida pela lei $P(A) > P(AA)$. Contudo, o reconhecimento desta relação não garantiu a intuição do cálculo apropriado. Uma vez aprendido o cálculo, observou-se uma transferência directa em situações muito semelhantes (de dois para três berlindes e de berlindes para dados). A transferência foi drasticamente restringida quando as situações não eram semelhantes (o problema das maçãs).

No caso da lei da adição, em experiências compostas, observou-se uma quase total incompreensão do carácter composto destes acontecimentos e de inventariação das diferentes situações que constituem o mesmo acontecimento.

Para estes autores, a inexistência de intuições primárias e de enviesamentos intuitivos, implicam que

> "*...uma intuição secundária, destinada a preencher a lacuna intuitiva ou a substituir uma intuição primária inadequada, não pode ser construída como resultado de uma explicação local, mesmo clara e convincente. Diferentemente, é exigido um exercício prolongado, que interactuaria, cremos nós, com estádios amplos de desenvolvimento intelectual (operações concretas e formais) de tal modo que a construção relevante seria organicamente incorporada na estrutura mental à medida que se desenvolve*." (Fischbein, Barbat & Mînzat, 1975, p. 153)

Verificou-se ainda, neste estudo, que não parece haver uma melhoria sistemática e espontânea das intuições com a idade. Além disso, no caso dos alunos do 10º ano, a superioridade dos alunos dos cursos com matemática salientou-se particularmente quando eles foram induzidos a transferir uma operação aprendida.

Fischbein, Pampu e Mînzat (1975a) realizaram um estudo com o propósito fundamental de determinar a idade a partir da qual é possível falar de uma intuição do acaso e de probabilidade na criança. Para tal, envolveram no estudo sujeitos dos 6 aos 14 anos de idade, repartidos por cinco grupos etários: 5:10-7:6 (nível pré-escolar), 7:0-8:3, 9:2-10:5, 11:3-12:10 e 13:5-14:5. Foram usados seis aparatos de madeira com diferentes bifurcações, dos quais três envolviam apenas acontecimentos equiprováveis e os outros três envolviam acontecimentos com probabilidades diferentes e implicavam a adição e multiplicação de probabilidades. Para cada aparato foram feitas duas perguntas: uma relativa ao lançamento de um berlinde e outra relativa a vários lançamentos de um berlinde (conceito de frequência).

No caso das situações envolvendo probabilidades iguais, verificou-se que as crianças do nível pré-escolar atingiram uma elevada percentagem de respostas correctas, superior à obtida pelas crianças mais velhas. Para os sujeitos mais novos, a intuição de equiprobabilidade, apoiada por uma reduzida capacidade de análise e por uma relativa indiferença ao detalhe, foi suficiente para responder a estas questões. Além disso, para estes sujeitos não se verificou uma diferença clara entre a probabilidade como um facto objectivamente condicionado e como um capricho subjectivo.

No caso dos sujeitos mais velhos, os autores explicam os fracos resultados obtidos em termos do ensino recebido.

> "O processo de ensino – particularmente como é determinado pelas escolas – orienta a criança para uma interpretação determinista do fenómeno, no sentido de procurar e explicar relações em termos claros, certos e unívocos. A criança é ensinada a procurar as causas de um fenómeno na forma de factores operando univocamente." (Fischbein, Pampu & Mînzat, 1975a, p. 169)

As dificuldades em reconciliar o estocástico e o determinado em crianças de 11-12 anos explicam-se ainda, não apenas por referência ao estádio de desenvolvimento intelectual (operações concretas), segundo Piaget e Inhelder (s/d), mas também pela existência de um estado de desequilíbrio. Neste último caso, para Fischbein, Pampu e Mînzat (1975a) as respostas hesitantes e oscilantes destas crianças, que aumentaram com a idade, constitui um argumento forte em favor desta explicação.

Em relação às situações envolvendo probabilidades diferentes e as operações de adição e multiplicação, verificou-se que a percentagem de respostas correctas aumentou com a idade. As dificuldades sentidas pelas crianças mais novas podem explicar-se, segundo estes autores, pela complexidade do próprio aparato, pelo facto da incerteza presente nestas situações poder ser compensada, em certa medida, pela existência de uma opção que pode ser objectivamente justificada a partir de assimetrias e causalidades e pela exigência de certas construções lógicas, as quais são elaboradas gradualmente. O maior salto, na direcção das respostas correctas, verificou-se no grupo etário dos 11:3-12:10, o que confirma, em parte, as conclusões e recomendações de Piaget. Tal como no estudo anterior, no sentido de atenuar a visão determinista, os autores advogam que a criança seja confrontada desde muito nova com problemas práticos e teóricos deste tipo, para além do cálculo de probabilidades que é geralmente ensinado às crianças mais velhas.

Finalmente, quanto à explicitação da frequência, verificou-se que foram os sujeitos dos dois grupos etários mais velhos que mais beneficiaram, apresentando maiores percentagens de respostas correctas.

Num outro estudo de Fischbein, Pampu e Mînzat (1975b), em que participaram três grupos de 60 sujeitos, correspondentes aos níveis pré-escolar (5:0-6:4), 3º ano (9-10) e 6º ano (12:4-13:7), questionaram-se as crianças acerca das probabilidades de obter um berlinde de uma dada cor de duas caixas com berlindes de duas cores. Neste contexto, as crianças deviam escolher o saco (da esquerda ou da direita) onde era mais provável obter o berlinde da cor indicada ou afirmar que a probabilidade era igual nos dois sacos. Cada um dos grupos de 60 sujeitos foi ainda dividido em três subgrupos de 20 sujeitos, correspondentes às três condições experimentais seguintes: numa, foram ilustradas apenas as três respostas possíveis; noutra, o sujeito extraiu vários berlindes de cada caixa de modo a salientar as probabilidades (no caso de probabilidades iguais nos dois sacos, o investigador controlou a proporção exacta de berlindes a obter nas duas caixas) e foi-lhe ensinada uma técnica de agrupamento para responder às questões (face a duas caixas, uma com $4B$ (berlindes brancos)/ $1P$ (berlinde preto) e outra com $9B/2P$, por agrupamento conclui-se que a segunda caixa continha $4B/1P+4B/1P$ e sobrava $1B$, donde, seria mais provável extrair o berlinde branco da segunda caixa); e na terceira, foram apenas ilustrados os procedimentos de agrupamento.

Em cada uma das três condições experimentais anteriores, foi confirmada (ou não) a resposta dos sujeitos em cada uma das 18 questões, sendo recompensados (com brinquedos, lápis, etc.) para um número mínimo de respostas correctas, que aumentou com a idade dos sujeitos.

Em relação às 18 questões, elas agrupavam-se em três grupos de seis questões, segundo o tipo de razões envolvidas na comparação: nas razões unidimensionais, manteve-se um dos termos correspondentes das razões; nas razões bidimensionais diferentes, os termos das razões não obedeciam a quaisquer restrições; e nas razões bidimensionais iguais, as razões eram iguais. As 18 questões ainda foram agrupadas em dois grupos de nove questões, considerando a grandeza dos termos das razões. Neste caso, os 'conjuntos grandes' resultaram da multiplicação, por um mesmo número, do número de berlindes de ambas as cores dos 'conjuntos pequenos', mantendo-se assim as razões a comparar.

Neste estudo, cada um dos grupos de 20 sujeitos era constituído por igual número de rapazes e raparigas e eram equivalentes no que concerne à realização escolar. Relativamente a esta última variável, apenas foram incluídos sujeitos com classificações positivas.

A realização de uma análise de variância, considerando os factores idade, condição experimental e tipo de razões, mostrou que: (1) o factor idade foi altamente significativo, revelando um aumento das respostas correctas com a idade; (2) o factor experimental também foi altamente significativo, tendo-se obtido melhores resultados no conjunto das duas condições de instrução do que sob a condição de não instrução; (3) por fim, o factor tipo de razões também foi altamente significativo, tendo-se verificado diferenças mais importantes nos resultados obtidos para cada categoria de razões nas crianças do nível pré-escolar e do 3º ano.

Observou-se ainda uma interacção altamente significativa entre a idade e o tipo de razões, tendo-se verificado as maiores mudanças produzidas pela idade nas razões bidimensionais (diferentes e iguais) e as menores mudanças nas razões unidimensionais. Também foi significativa a interacção entre a condição experimental e o tipo de razões, tendo-se verificado um aumento das respostas correctas, particularmente saliente, nas razões bidimensionais (diferentes e iguais). Nas razões unidimensionais, o número de respostas correctas foi muito superior ao nível do acaso para qualquer dos três níveis etários, o que se explica pela simplicidade dos problemas. Finalmente, a interacção entre a idade e a condição experimental não foi significativa, resultando aparentemente que todos os sujeitos beneficiaram igualmente. Ao nível pré-escolar, os sujeitos sob a condição de não instrução apresentaram um número de respostas correctas definitivamente inferior ao nível do acaso nas razões bidimensionais iguais. Já sob as condições de instrução, o número médio de respostas correctas aumentou, atingindo apenas o nível do acaso. Em relação às razões bidimensionais diferentes, a instrução não melhorou as respostas destes sujeitos.

Verificou-se ainda que as diferenças entre as respostas obtidas nos 'conjuntos grandes' e nos 'conjuntos pequenos' foram irrelevantes. Não se observou também qualquer diferença significativa nos efeitos produzidos pelas duas condições de instrução nem qualquer aprendizagem significativa durante a sessão experimental. Também não se observaram diferenças significativas para o factor sexo nem qualquer interacção significativa, considerando a análise de variância com base nos factores sexo, idade e condição experimental.

Relativamente às justificações verbais e aos procedimentos de resolução, observou-se nas crianças do nível pré-escolar a predominância de comparações numa razão em todas as condições experimentais, embora diminuindo ligeiramente sob as condições de instrução. Nos sujeitos do 3º ano, sob a condição de não instrução, foram predominantes as comparações numa razão e, sob as condições de instrução, foram predominantes as comparações entre duas razões. Nos sujeitos do 6º ano, foram sempre predominantes as comparações entre duas razões, tendo sido adoptada por todos os sujeitos sob as condições de instrução.

Com base nos resultados obtidos, Fischbein, Pampu e Mînzat (1975b) concluíram que as crianças do nível pré-escolar podem compreender correctamente e enfrentar com êxito situações que envolvem o acaso. Ao nível dos 9-10 anos de idade, as crianças exibiram respostas espontâneas pouco diferentes das apresentadas pelas crianças do nível pré-escolar. Contudo, bastou uma breve instrução sistemática para tornar possível a comparação numérica entre as duas razões, tornando, assim, as suas respostas comparáveis às dos sujeitos de 12-13 anos de idade. Para estes autores esta conclusão não contradiz o facto de Piaget e Inhelder (s/d) advogarem a necessidade do conceito de proporcionalidade no estabelecimento de duplas comparações, apenas disponível no estádio das operações formais, pois tal conclusão foi apenas baseada em respostas espontâneas. Diferentemente, destaca-se o efeito da breve instrução, que pode constituir um argumento a favor do ensino das probabilidades, mesmo na escola primária.

Num estudo posterior, Fischbein, Nello e Marino (1991) procuraram avaliar em que medida os factores idade e ensino de probabilidades afectam os julgamentos probabilísticos de crianças e adolescentes. Para tal, recorreram a sujeitos do 4º e 5º anos (9-11 anos) e do 6º, 7º e 8º anos com e sem ensino de probabilidades (11-14 anos).

Foi usada uma metodologia de questionário, cujos itens contemplavam os seguintes temas: (1) conceitos de acontecimento certo, possível e impossível; (2) estruturas estocásticas equivalentes; e (3) probabilidades em experiências compostas.

Em relação ao primeiro tema, verificou-se que a maioria dos sujeitos de todas as idades identificaram adequadamente acontecimentos certos, possíveis e impossíveis, tendo-se verificado uma ligeira melhoria com a idade. Quanto ao ensino de probabilidades, observou-se também um efeito positivo para muitos itens, embora pequeno e um tanto inconsistente.

De entre os diferentes tipos de acontecimentos, foi na categoria dos certos que se obtiveram percentagens mais baixas de respostas correctas, contrariando-se a ideia de que o conceito de possível é o mais sofisticado. A explicação dada por estes autores é que, enquanto se tende a relacionar a noção de certo à de único, a introdução da ideia de multiplicidade de resultados possíveis torna natural a noção de possível.

Em conclusão, de acordo com Fischbein, Nello e Marino (1991), não devemos partir do princípio que as crianças compreendem espontaneamente os termos certo, possível e impossível. Estes autores acrescentam, ainda, a necessidade de treino para as crianças distinguirem entre acontecimentos raros e impossíveis e entre acontecimentos muito frequentes e certos.

Nas duas questões que envolviam a mesma estrutura estocástica (lançar três dados simultaneamente ou sucessivamente e lançar três moedas simultaneamente ou sucessivamente), observou-se uma melhoria das respostas dos sujeitos com a idade e com o ensino de probabilidades. A maior fonte de erros resultou dos sujeitos basearem as suas respostas na ideia de que os resultados podem ser controlados pelo indivíduo, o que foi mais notório no caso dos lançamentos sucessivos dos dados e das moedas.

Com base nestes resultados, os autores advogam o uso de questões deste tipo no ensino, valorizando a vertente matemática das probabilidades ao afirmarem:

> "Ensinar a criança que as probabilidades são um ramo da matemática e, consequentemente, que têm a ver com objectos ideais abstractos e definidos formalmente – como a geometria ou a aritmética – é uma das principais tarefas do processo de ensino." (Fischbein, Nello & Marino, 1991, p. 531)

Tal como já foi referido antes (Fischbein, Barbat & Mînzat, 1975), verificou-se que, em geral, os alunos têm muita dificuldade em comparar probabilidades em experiências compostas. Nesta investigação estudou-se sistematicamente o problema com dados e moedas a partir de (1) questões concretas, (2) questões gerais e (3) questões definidas por somas obtidas com um par de dados.

Nas questões concretas, pedia-se aos alunos que comparassem a probabilidade de obter dois 6 com a probabilidade de obter um 5 e um 6 no lançamento de dois dados, e a de obter duas caras com a de obter uma cara e um escudo no lançamento de duas moedas. Verificou-se que os alunos tiveram muitas dificuldades em seleccionar as respostas correctas, não se observando qualquer melhoria com a idade nem com o ensino de probabilidades. Ao contrário, houve menos respostas correctas entre os alunos mais velhos que tinham recebido ensino de probabilidades do que entre os alunos mais novos que não tinham recebido qualquer ensino de probabilidades.

A maior fonte de erro, que levou a afirmar a equiprobabilidade dos acontecimentos, parece ter resultado de não terem sido consideradas as diferentes ordens possíveis dos resultados. Identificaram-se duas ideias principais para justificar a equiprobabilidade dos resultados: (1) uma ideia mais primitiva, em que ambos os acontecimentos são vistos como resultado do acaso; e (2) uma ideia mais sofisticada, em que as composições binárias de acontecimentos equiprováveis ainda se mantêm equiprováveis.

Nas questões gerais, compararam-se as probabilidades de obter números iguais e números diferentes no lançamento de dois dados, e de obter faces iguais e faces diferentes no lançamento de duas moedas. Neste caso, observaram-se percentagens de respostas correctas claramente superiores em todos os níveis etários. Agora, a maior fonte de erro resultou da afirmação da equiprobabilidade de ambos os acontecimentos, no caso dos dados, e da afirmação da maior probabilidade de obter faces diferentes, no caso das moedas.

Para os autores, a melhor realização conseguida nestas questões gerais explica-se pelo facto de muitos sujeitos (os que responderam correctamente) possuírem uma capacidade intuitiva de avaliar globalmente a dimensão e a estrutura do espaço amostral, que melhora espontaneamente com a idade e é estimulada por questões gerais que evocam a ideia de multitude. Assim, seria de esperar mais avaliações correctas em espaços amostrais mais vastos, o que se confirmou ao obterem-se melhores resultados com dados do que com moedas.

A questão dos dados, na forma concreta, foi também estudada por Lecoutre e Durant (1988), tendo-se observado uma percentagem de adesão à equiprobabilidade da ordem dos 60%, entre estudantes de várias escolas (liceus) de diferentes níveis de formação. Esta distorção nos julgamentos de probabilidade, a que chamaram 'enviesamento de equiprobabilidade', mostrou-se resistente a variações da situação experimental (informação de natureza combinatória, informação de natureza frequencista, alterações na formulação e utilização de intuições probabilísticas correctas) e a variações de classificação dos sujeitos (formação em teoria de probabilidades, tipo de estudos secundários, prática em jogos de sorte-azar e sexo). Em quase todos os casos, o nível de adesão à equiprobabilidade foi pelo menos igual a 50%.

Face à extrema resistência deste enviesamento, os autores procuraram identificar os 'modelos cognitivos espontâneos' subjacentes às respostas dos alunos, recorrendo, para tal, às respostas e às justificações dadas pelos alunos em três questões envolvendo dados de cores diferentes. Na primeira, comparava-se a probabilidade de obter um 5 e um 6 (por esta ordem) com a probabilidade de obter dois 6; na segunda, comparava-se a probabilidade de obter um 6 e um 5 (por esta ordem) com a probabilidade de obter dois 6; e na terceira, comparava-se a probabilidade de obter um 5 e um 6 (sem ordem) com a probabilidade de obter dois 6. Dos resultados obtidos, Lecoutre e Durant inferiram nos alunos cinco modelos cognitivos principais: 'dobles mais raros', conduzindo à resposta correcta; 'condição suplementar' (para obter, por exemplo, o resultado (6, 5) tem-se de satisfazer a condição dos números e a condição da ordem), conduzindo à equiprobabilidade; 'dobles mais fáceis', conduzindo à equiprobabilidade; 'acaso', conduzindo à equiprobabilidade; e 'uma chance para cada resultado' (modelo correcto), conduzindo à resposta correcta.

Voltando ao estudo de Fischbein, Nello e Marino (1991), nas questões envolvendo somas obtidas com um par de dados, compararam-se as probabilidades das somas 3 e 6 e das somas 7 e 10. A suposição de que muitos sujeitos sem ensino de probabilidades apostariam nas somas maiores, independentemente da dimensão do espaço amostral, confirmou-se. Na comparação das probabilidades das somas 3 e 6, a maioria dos sujeitos escolheu a soma 6, que é a soma mais provável, mas fê-lo na base de uma justificação errada. Na comparação das probabilidades das somas 7 e 10, uma percentagem relativamente inferior fez a escolha correcta. Contudo, neste caso, observou-se um claro progresso com a idade e com o ensino de probabilidades.

A partir das respostas obtidas, Fischbein Nello e Marino identificaram, nestas questões, os quatro níveis seguintes: (1) indicar o maior número sem qualquer referência aos resultados que o constituem; (2) indicar apenas alguns dos resultados possíveis, os quais conduziram a uma avaliação errada; (3) descrever todos os pares possíveis sem que a ordem seja considerada; e (4) imaginar (mesmo espontaneamente) todos os resultados possíveis e, em consequência, concluir correctamente. Nestas questões, a equiprobabilidade baseou-se apenas em ideias gerais do acaso e de sorte. É ainda um resultado algo surpreendente, o facto de, entre as respostas erradas, a percentagem de respostas afirmando a equiprobabilidade ter aumentado com a idade e com o ensino de probabilidades.

As respostas dos sujeitos a outras duas questões, em que se comparavam as probabilidades das somas 3 e 11 e das somas 2 e 12, num contexto de jogo, demonstraram essencialmente as conclusões anteriores. A percentagem de respostas correctas aumentou com a idade, enquanto que o efeito do ensino de probabilidades não foi consistente ao longo das duas questões. Verificou-se ainda ser mais fácil comparar as probabilidades das somas 2 e 12 do que comparar as probabilidades das somas 3 e 11, o que se explica, para os autores, pelo facto das somas 2 e 12 serem obtidas de uma só maneira.

Apesar das dificuldades reveladas pelos alunos nas questões definidas por somas, os autores advogam a existência, em sujeitos com pouca ou nenhuma experiência de ensino de probabilidades, de uma capacidade intuitiva para avaliar a amplitude do espaço amostral correspondente a uma certa experiência estocástica.

Desta investigação, os autores concluíram que o estudo do conceito de probabilidade parece muito mais complexo do que usualmente é considerado. Assim, um ensino para desenvolver uma base intuitiva e formal sólida, correcta e coerente para o raciocínio probabilístico deve abordar uma grande variedade de compreensões erradas, concepções erradas e enviesamentos e tendências emocionais. Para estes autores,

> "Estas distorções podem ser causadas por dificuldades linguísticas, pela não existência de capacidades lógicas, pela dificuldade de extrair a estrutura matemática de contextos práticos e pela dificuldade em aceitar que os acontecimentos dependentes do acaso podem ser analisados de um ponto de vista determinista-preditivo." (Fischbein, Nello & Marino, 1991, p. 547)

2.3.3. Processamento de informação

Brainerd (1981) estudou a alteração dos julgamentos probabilísticos com o aumento da idade das crianças no contexto da memória de trabalho. Para tal, conduziu uma série de experiências com crianças de dois níveis etários: crianças de 4-5 anos e crianças da escola primária, em que as tarefas envolviam pequenas variações do procedimento de extracções aleatórias, introduzido por Piaget e Inhelder (s/d).

A memória de trabalho foi concebida, fundamentalmente, como uma elaboração da memória de curto prazo que, apesar da sua maior capacidade, era vista como "um mecanismo de capacidade limitada para armazenar e processar informação ao serviço de alguma meta bem definida, tal como para resolver um problema." (Brainerd, 1981, p.

467). No caso do julgamento probabilístico, o espaço total de trabalho envolve um total de quatro tipos de armazenamento (armazenamento das frequências iniciais, registo dos elementos amostrados inicialmente, armazenamento da informação processada acerca do conjunto de objectos e armazenamento das respostas anteriores) e três operações de processamento (recuperação da informação armazenada, integração da informação recuperada de diferentes origens e aplicação de regras de selecção de resposta).

Segundo Brainerd (1981), os resultados obtidos apontam para cinco conclusões mais imediatas acerca do papel dos factores da memória de trabalho nos julgamentos probabilísticos das crianças: (1) a retenção da informação crítica para identificar o acontecimento mais frequente não é a causa dos fracassos das crianças na previsão daquele acontecimento, enquanto acontecimento mais provável; (2) os progressos de desenvolvimento na recuperação da informação de frequência acerca do conjunto alvo, são as causas próximas da melhor realização nos problemas de extracção aleatória (a recuperação da frequência foi mais comum nas crianças mais velhas e observaram-se grandes progressos no julgamento probabilístico quando as crianças foram induzidas a recuperar a informação de frequência); (3) as mudanças de desenvolvimento na recuperação da informação de frequência são, principalmente, uma consequência dos aumentos generalizados da memória de trabalho e não tanto uma aquisição ou refinamento das componentes individuais da memória de trabalho; (4) a explicação de que as crianças falham porque não possuem os *skills* cognitivos necessários, devida a Piaget e Inhelder (s/d), não é prometedora, pois, as operações de armazenamento e de processamento necessárias à identificação e previsão do acontecimento mais frequente estão presentes nas crianças mais novas; e (5) tanto as crianças mais novas como as mais velhas parecem particularmente propensas a localizar espaço de trabalho para armazenar e, subsequentemente, recuperar factos não essenciais ou irrelevantes para prever o acontecimento mais frequente.

De acordo com Hoemann e Ross (1982), os resultados de Fischbein (1975) e Brainerd (1981) convergem ao destacarem que existem processos não conceptuais que medeiam o sucesso nas tarefas de probabilidade. Para Fischbein, as diferenças de idade obtidas reflectem diferenças de complexidade perceptiva da tarefa, enquanto para Brainerd tais diferenças são uma função das diferenças de memória. Por outro lado, os resultados divergem, pois, no caso de Brainerd, as crianças mais novas cometeram erros nas situações mais simples, enquanto as mais velhas foram quase perfeitas nas suas evocações.

Também Siegler (1981) tentou demonstrar que as regras de processamento de informação para resolver tarefas de probabilidades mudam ao longo do desenvolvimento da criança. Siegler postulou quatro regras com grau de complexidade crescente, aplicáveis em probabilidades e em outros domínios.

> Regra I: É observado apenas o número de elementos favoráveis. Consequentemente, é escolhida a situação com mais elementos favoráveis.
> Regra II: A regra I deixa de ser adoptada quando o número de elementos favoráveis é igual nas duas situações. Neste caso, é tido em conta também o número de elementos não favoráveis.
> Regra III: É determinada a diferença entre o número de elementos favoráveis e não favoráveis, sendo escolhida a situação com maior diferença.
> Regra IV: São calculadas as proporções entre o número de elementos favoráveis e o número de elementos não favoráveis.

De acordo com Siegler, a criança adquire cada uma destas quatro regras sequencialmente. Em ordem a testar a validade das suas hipóteses, o autor concebeu um total de 24 itens envolvendo duas pilhas de berlindes de duas cores, em cada um dos quais o sujeito teria de escolher a pilha em que seria mais provável obter um berlinde de uma dada cor ou afirmar a equiprobabilidade de obter o berlinde das duas pilhas, e agrupando-se em conjuntos de quatro segundo seis problemas-tipo. Participaram no estudo sujeitos dos 3 aos 20 anos de idade.

Em termos de resultados, observou-se, nos sujeitos de 3 anos de idade, a tendência de não usar qualquer regra, e de utilizar a Regra I, em cerca de metade dos sujeitos de 5 anos de idade. Esta tendência foi lenta no início e demorou muito tempo a completar-se. A maioria dos sujeitos de 8 anos de idade que não usaram a Regra I usaram a Regra IV. Esta tendência manteve-se nos sujeitos de 12 anos e a grande maioria dos sujeitos universitários usaram a Regra IV. Verificou-se, ainda, que a Regra II e a Regra III foram pouco utilizadas em qualquer idade.

Para Scholz e Waller (1987) os resultados obtidos por Brainerd (1981) e Siegler (1981) apoiam fortemente a abordagem de Fischbein, de acordo com a qual a aquisição de um conceito operativo de probabilidade é promovido e desenvolvido através do ensino de regras e estratégias do cálculo de probabilidades às crianças. Também o facto de as crianças saltarem sistematicamente a Regra II, corrobora a suposição de que, não só a selecção, mas também a aquisição das regras, são mediadas pela aquisição de conhecimento conceptual.

Numa re-interpretação dos resultados obtidos por Brainerd e Siegler, Scholz e Waller concluem que tanto o conhecimento conceptual como as capacidades estratégicas constituem requisitos para tratar com sucesso problemas de probabilidades. Além disso, as componentes de conhecimento e de estratégia influenciam-se e estimulam-se mutuamente durante o decurso do desenvolvimento.

2.3.4. Estudo de David Green

Green (1982, 1983) conduziu um estudo em larga escala em Inglaterra envolvendo 2930 alunos com idades entre os 11 e os 16 anos pertencendo a turmas do 1º ao 5º ano de escolas secundárias. Neste estudo, o autor utilizou um teste incluindo três categorias de itens: itens sobre cálculo combinatório, itens sobre probabilidades e itens sobre compreensão verbal. No sentido de explicar mais detalhadamente o desenvolvimento de conceitos e termos nestes três domínios, Green considerou três variáveis do sujeito: a idade, o sexo e a capacidade de raciocínio geral.

Os resultados do estudo revelaram que, em geral, os sujeitos melhoraram a realização no teste com a idade e com a capacidade de raciocínio geral. Frequentemente, observaram-se padrões de resposta semelhantes entre os sujeitos do 1º e 2º anos e a realização melhorou substancialmente entre os sujeitos do 3º, 4º e 5º anos.

Nos itens que requeriam apenas o conceito de contagem, todos os sujeitos, de todos os anos, obtiveram um nível de realização satisfatório. Diferentemente, os itens que requeriam o conceito de razão revelaram-se particularmente difíceis, especialmente entre os sujeitos dos três primeiros anos. A ideia de esperança matemática foi acessível à maior parte dos sujeitos, apesar de ser raramente tratada nas aulas de matemática. Já no caso dos itens sobre aleatoriedade, multiplicação de probabilidades, inferência amostral e estabilidade de frequências, os sujeitos sentiram maiores dificuldades.

Em termos de estratégias usadas pelos alunos em problemas de comparação de chances, foram frequentemente sugeridas comparações resultantes de contagens e de cálculo de diferenças, embora raramente usadas de forma consistente. Em contraste, o cálculo de razões foi raramente mencionado e foi apenas referido pelos sujeitos mais velhos e intelectualmente mais desenvolvidos. Para este autor, as aquisições normativas de probabilidades requer claramente uma compreensão dos conceitos de fracção e de proporção.

No caso da compreensão verbal, não deve ser assumido que os significados dos termos probabilísticos que indicam diferentes graus de probabilidade são comummente partilhados pelos sujeitos. Quanto aos itens sobre cálculo combinatório, verificou-se que a maioria dos alunos responderam correctamente a um item de nível concreto – envolvendo a descrição e contagem das permutações de 3 elementos –, mas revelaram muitas dificuldades em dois itens de nível formal – envolvendo apenas a contagem das permutações de 3 e de 4 elementos.

Frequentemente, os sujeitos não distinguiram entre acontecimentos certos e quase certos e entre acontecimentos impossíveis e quase impossíveis. Além disso, atribuíram uma probabilidade de 50% a acontecimentos que podem ou não ocorrer e a acontecimentos equiprováveis em que estavam envolvidos mais do que dois acontecimentos.

Geralmente, os sujeitos do sexo masculino consistentemente obtiveram *scores* mais altos do que os sujeitos do sexo feminino no conjunto dos itens do teste, em probabilidades e na compreensão verbal. No cálculo combinatório obtiveram-se *scores* muito semelhantes.

Observou-se que a capacidade de raciocínio geral foi o factor determinante no *score* do teste, explicando 44% da variância, sendo três vezes mais importante do que o factor idade (ano escolar), que explicou 14% da variância. O factor sexo revelou-se de menor importância, explicando apenas cerca de 0.6% da variância. A capacidade matemática, ao substituir a capacidade de raciocínio geral, mostrou ser ainda o factor determinante no *score* do teste, explicando 40% da variância.

Em ordem a localizar cada sujeito num nível de desenvolvimento do conceito de probabilidade, o autor, com base no *Guttman Scalogram Analysis*, estabeleceu quatro níveis, incluindo um nível zero que correspondia a uma falha total. Verificou-se, assim, existir uma progressão estável dos níveis com a idade, confirmada pelas médias dos cinco anos escolares. A hipótese de que este desenvolvimento poderia ser um tanto inato ou inculcado desde muito cedo a partir de experiências formativas, não foi confirmada. Com esse propósito, foi realizada posteriormente uma análise através da capacidade de raciocínio geral, a qual demonstrou que eram estes níveis de raciocínio que explicavam as diferenças observadas. Assim, a tendência geral é que enquanto os sujeitos mais capazes entram na escola secundária no nível dois e abandonam-na no nível três, correspondendo ao ganho de um nível, os sujeitos menos capazes, para o mesmo período de escolaridade, entram num nível algures entre zero e um e saem no nível um, correspondendo a ganhar cerca de meio nível. Finalmente, os alunos médios entram no nível um e saem no nível dois, ganhando também um nível.

Por último, alguns itens do teste permitiram avaliar a inserção dos alunos nos diferentes estádios do conceito de probabilidade estabelecidos por Piaget e Inhelder (s/d). Os resultados obtidos nestes itens, permitem concluir que a maior parte dos alunos do 5º ano não atingiram o estádio das operações formais (estádio III) e presumivelmente abandonaram a escola ao nível das operações concretas (estádio II).

Na mesma linha de investigação de Green (1982), Munisamy e Doraisamy (1998) conduziram um estudo sobre os níveis de compreensão de conceitos probabilísticos junto de alunos malaios do 4º e do 6º anos do ensino secundário, tendo sido estudada a influência das variáveis independentes sexo, ano escolar e capacidade matemática. Deve salientar-se que, na Malásia, a primeira abordagem ao tema de probabilidades acontece no 4º ano e, em relação aos sujeitos do 6º ano, tratava-se de alunos com baixo desempenho em matemática.

Dos resultados deste estudo, salienta-se que o conceito de frequência esperada revelou-se intuitivo e acessível para a maior parte dos sujeitos. Os conceitos de resultados equiprováveis, de selecção aleatória e de probabilidade clássica revelaram-se ainda razoavelmente intuitivos para os alunos, apesar da qualidade e precisão das respostas dos alunos terem sido largamente influenciadas pelas heurísticas de julgamento probabilístico (representatividade, disponibilidade e ancoragem), pela tendência de alternância e pelos efeitos recentes positivo e negativo.

Revelaram-se já mais difíceis para a maioria dos sujeitos, contrariamente aos resultados obtidos por Fischbein, Barbat e Mînzat (1975), os conceitos de frequência relativa, acontecimento complementar, acontecimentos compostos, lei aditiva de probabilidades e probabilidade condicionada. Tal como Fischbein, Barbat e Mînzat (1975), o autor observou que a lei de multiplicação de probabilidades foi particularmente difícil para estes alunos.

No caso do conhecimento e compreensão de termos frequentemente usados no ensino de probabilidades observou-se que estas expressões eram ambíguas para os alunos, consolidando-se os resultados obtidos por Green (1982). Em particular, os alunos cometeram o erro comum de não distinguirem entre acontecimentos quase certos e certos e entre acontecimentos quase impossíveis e impossíveis.

Em relação à hierarquia dos conceitos probabilísticos, estabeleceram-se três níveis, mais um nível zero indicando falha total, variando a média ponderada do nível de conceito entre 1.4 (para o 4º ano) e 2.2 (para o 6º ano). Em geral, observou-se que os alunos mais capazes ganharam cerca de meio nível durante o período dos dois anos, os alunos médios começaram um nível atrás e ganharam um nível e os alunos mais fracos começaram um nível e três quartos atrás e apenas ganharam três quartos de nível durante o mesmo período.

Na caracterização dos diferentes níveis, verificou-se que no nível um, os alunos possuíam conceitos intuitivos do acaso e de probabilidade, sendo compreendidos a maior parte dos conceitos probabilísticos elementares. Neste nível, a capacidade de dar respostas adequadas e precisas foi amplamente influenciada por variáveis psicológicas, tais como as heurísticas de julgamento probabilístico, a tendência de alternância e os efeitos recentes positivo e negativo. No nível dois, os alunos possuíam uma compreensão global dos conceitos probabilísticos e a lei da adição foi considerada relevante e aplicada apropriadamente. No nível três, os alunos compreendiam o conceito da lei da multiplicação em acontecimentos independentes e por extensão acontecimentos condicionados. Relacionando estes níveis com os considerados por Green (1982), verificou-se que o nível um correspondia aos níveis um e dois de Green, o nível dois correspondia ao nível dois de Green e o nível três correspondia aos níveis dois e três de Green.

Em relação à variável sexo, no conjunto dos sujeitos de ambos os anos, verificou-se que os sujeitos do sexo masculino obtiveram *scores* mais altos do que os sujeitos do sexo feminino em todas as questões. Considerando os sujeitos de cada um dos anos escolares, obtiveram-se diferenças estatisticamente significativas no 6º ano, favoráveis aos sujeitos do sexo masculino. Já no 4º ano, as diferenças não foram estatisticamente significativas. Em termos do nível de aquisição do conceito, observou-se que os sujeitos do sexo masculino foram superiores aos do sexo feminino, tendo a superioridade dos rapazes aumentado com a maturação.

No caso da variável ano escolar, a extensão da aquisição de ideias probabilísticas foi tipicamente maior para os alunos do 6º ano, comparativamente com os alunos do 4º ano. Este padrão de resultados sugere que as noções intuitivas de probabilidades desenvolvem-se ou tornam-se mais sólidas com a idade.

Finalmente, a capacidade matemática teve um efeito significativo sobre os resultados do teste, na medida em que os resultados mais elevados associaram-se à capacidade matemática mais elevada. Em termos do nível do conceito, os resultados mostraram claramente que os alunos de nível de capacidade matemática superior atingiram também níveis de aquisição do conceito superiores, comparativamente com os sujeitos de capacidade média e inferior. Todavia, com a educação, a maturação e a experiência, os sujeitos de capacidade matemática média progrediram relativamente mais do que os sujeitos de capacidade inferior e superior.

2.3.5. Heurísticas de julgamento probabilístico

Tversky e Kahneman (1982a) referem-se a várias heurísticas a que as pessoas recorrem para efectuarem julgamentos probabilísticos. Estas heurísticas, baseadas em avaliações naturais efectuadas rotineiramente como parte da percepção e da compreensão de mensagens, consistem em estratégias, deliberadas ou não, que se baseiam numa avaliação natural para produzir uma estimativa ou uma predição (Tversky & Kahneman, 1983).

Uma manifestação característica de uma heurística resulta da omissão de certas considerações relevantes para a tomada de decisão (Tversky & Kahneman, 1983). Consequentemente, a não consideração de informação importante para a tomada de decisão pode explicar a origem de erros sistemáticos e torná-los mesmo previsíveis. Contudo, apesar das suas limitações para produzir julgamentos probabilísticos normativamente correctos, há muitas situações em que a sua utilização é eficiente, útil e altamente económica.

Concretamente, Tversky e Kahneman (1982a) descrevem e exemplificam a utilização de três heurísticas: (1) a heurística de representatividade, (2) a heurística de disponibilidade e (3) a heurística de ajustamento e ancoragem. Estes autores estudaram também a influência de factores causais (Tversky & Kahneman, 1982b) e a falácia da conjunção (Tversky & Kahneman 1983) em julgamentos probabilísticos.

Representatividade. Frequentemente, as situações probabilísticas com que deparamos envolvem uma das seguintes questões: 'Qual é a probabilidade que o objecto A pertença à classe B?', 'Qual é a probabilidade que o acontecimento A origine o processo B?' e 'Qual é a probabilidade que o processo B produza o acontecimento A?'. A adesão à heurística da representatividade, também designada por 'intuição amostral' por Fischbein (1975), significa que as probabilidades são avaliadas com base na representatividade de A em relação a B, ou seja, pelo nível de semelhança entre A e B. Nestas circunstâncias, quando A é altamente representativo de B, a probabilidade de A resultar de B é julgada ser alta; quando A não é semelhante a B, a probabilidade que A resulte de B é julgada ser baixa.

A título de exemplo, considere-se a seguinte situação probabilística (Fernandes, 1990):

> Qual dos resultados seguintes, obtidos em 6 lançamentos consecutivos de uma moeda equilibrada (não viciada), é mais provável? (C representa a face cara da moeda e E representa a face escudo.)
> a) EECECC
> b) CECECE
> c) CCECCC
> d) Ambas as sequências a) e b) são igualmente prováveis.
> e) Todas as três sequências a), b) e c) são igualmente prováveis.

Muito embora as três sequências sejam igualmente prováveis, em termos das leis de probabilidades, os sujeitos julgaram a sequência c) como sendo menos provável, na medida em que ela não reflecte a proporção de caras e escudos na população. Alguns sujeitos foram ainda mais específicos ao declararem que a sequência a) é mais provável que a sequência b), pois esta última não reflecte a noção intuitiva de aleatoriedade, contrariamente à sequência a) (Fernandes, 1990).

Porque a heurística da representatividade não é afectada por vários factores que intervêm no julgamento de probabilidade, a sua utilização conduz, em certos casos, a erros sérios. De entre esses factores, Tversky e Kahneman (1982a) referem os seguintes: (1) insensibilidade às probabilidades prévias (ou *a priori*) dos resultados, (2) insensibilidade à dimensão da amostra e (3) concepções erradas do acaso.

Disponibilidade. A adesão à heurística da disponibilidade, significa que os sujeitos avaliam a frequência de uma classe ou a probabilidade de um acontecimento em função da facilidade com que exemplificações ou ocorrências podem ser construídas, evocadas ou associadas. Especialmente da facilidade de evocação, resulta que a avaliação errada de probabilidade é influenciada pela experiência do indivíduo.

A título de ilustração, considere-se a seguinte situação probabilística (Fernandes, 1990):

Um jogador do totoloto fez três apostas no concurso desta semana. Com qual dessas apostas, indicadas abaixo, tem mais chances de ganhar um prémio?
a) 1 2 3 4 5 6.
b) 5 13 24 25 30 42.
c) 2 17 19 25 34 39.
d) Tem as mesmas chances de ganhar um prémio com qualquer das apostas b) e c).
e) Tem as mesmas chances de ganhar um prémio com qualquer das apostas a), b) e c).

A menor probabilidade de ganhar um prémio no totoloto com a aposta a) foi justificada frequentemente a partir da evocação de resultados do totoloto, principalmente entre os sujeitos sem experiência de ensino de probabilidades. Alguns destes sujeitos distinguiram ainda entre as apostas b) e c), afirmando que b) seria mais provável pelo facto de incluir um número de cada um dos grupos das dezenas (Fernandes, 1990).

Naturalmente, a heurística da disponibilidade constitui um processo útil para avaliar a frequência ou a probabilidade, pois as exemplificações de grandes classes são normalmente obtidas com maior facilidade e rapidez do que as exemplificações de pequenas classes. Contudo, esta heurística é afectada por outros factores que estão na origem de predições erradas. Tversky e Kahneman (1982a) referem-se a (1) influências devidas à recuperabilidade das exemplificações, (2) influências devidas à eficácia de procura num conjunto e (3) influências de imaginabilidade.

Heurística de ajustamento e ancoragem. A adesão a esta heurística significa que as pessoas fazem estimativas partindo de um valor inicial que é seguidamente ajustado para produzir uma resposta final. Esta heurística é usada geralmente na previsão numérica, e o valor inicial ou ponto de partida, tanto pode ser sugerido pela formulação do problema, como resultar de um cálculo parcial.

Como exemplo, considere-se a seguinte questão (Tversky & Kahneman, 1982a):

Estimar o valor de cada uma das expressões:
a) $8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$.
b) $1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8$.

De dois grupos de alunos do ensino secundário, num tempo de 5 segundos, um estimou o valor da expressão a) e outro estimou o valor da expressão b). A limitação do tempo forçou os sujeitos a que efectuassem apenas alguns passos do cálculo e estimassem, de seguida, o valor da expressão por extrapolação ou ajustamento. A insuficiência do ajustamento conduziu a uma subestimação do valor exacto. Além disso, observando que as operações são efectuadas da esquerda para a direita, verificou-se que o valor da expressão a) foi julgado ser maior do que o valor da expressão b). Concretamente, para o valor exacto de 40 320 de ambas as expressões, obteve-se 2250 para a mediana dos valores dos sujeitos que avaliaram a sequência decrescente e 512 para a mediana dos valores dos sujeitos que avaliaram a sequência crescente.

Além da insuficiência do ajustamento, Tversky e Kahneman (1982a), referem-se a mais dois factores que explicam limitações desta heurística: (1) influências na avaliação de acontecimentos conjuntivos e disjuntivos e (2) ancoragem na avaliação de distribuições de probabilidade subjectiva.

<u>Causalidade</u>. Frequentemente, as pessoas afirmam que o resultado de uma experiência aleatória pode ser determinado a partir de factores causais. Por exemplo, podem afirmar que o resultado do lançamento de uma moeda ao ar depende da face que fica virada para cima no momento de lançamento da moeda e da força com que é lançada, e que, quando rodamos uma roleta, o resultado obtido depende também da força com que é rodada.

Especialmente no caso das probabilidades condicionadas, frequentemente as pessoas avaliam a probabilidade de $P(A|B)$ em função de possíveis relações entre os acontecimentos A e B, muito embora a consideração de tais relações não seja relevante para o cálculo da probabilidade. Mesmo no caso das relações serem simplesmente sugeridas (não verificadas), as pessoas utilizam-nas para fazer os seus julgamentos probabilísticos ou para estimarem valores de probabilidade.

Tversky e Kahneman (1982b) identificaram quatro tipos diferentes de relações entre A e B que as pessoas usam na avaliação de $P(A|B)$: (1) se B é entendida como uma causa da ocorrência de A, referimo-nos a B como uma referência causal de A; (2) se A é vista como uma possível causa de B, referimo-nos a B como uma referência diagnóstica de A; (3) se B não é entendida como causa nem efeito de A, mas são ambas vistas como consequência de um outro factor, referimo-nos a B como indicador; e (4) se B e A não parecem estar relacionadas através de qualquer ligação causal directa ou indirecta, referimo-nos a B como incidental.

Para testar a assimetria inferencial, no sentido que as pessoas inferem com maior confiança efeitos de causas do que causas de efeitos, os autores referidos apresentaram situações em que se pedia aos sujeitos para compararem as probabilidades condicionadas $P(A|B)$ e $P(B|A)$. O acontecimento A era visto como uma causa de B e $P(A) = P(B)$. Muito embora de $P(A) = P(B)$ resulte que $P(A|B) = P(B|A)$, um número significativo de sujeitos depositaram maior confiança na previsão da causa para o efeito do que no sentido oposto, o que significa que responderam de acordo com a relação $P(B|A) > P(A|B)$. Esta avaliação de probabilidades condicionadas aconteceu em várias situações probabilísticas, de que é exemplo o acontecimento 'Uma rapariga tem os olhos azuis se a sua mãe tem olhos azuis' (Fernandes, 1990; Tversky & Kahneman, 1982b).

Quando uma das variáveis parece explicar melhor a outra variável, observou-se uma assimetria de inferência no sentido desta variável para a outra. Por exemplo, em pessoas, a variável altura pode ser vista como uma melhor explicação da variável peso, relativamente à relação inversa.

No caso em que uma das variáveis é vista como uma indicação mais forte da outra variável, observou-se que a assimetria de inferência é plausível no sentido da mais forte para a mais fraca. Por exemplo, o resultado num teste longo constitui uma indicação mais forte do que o resultado num teste mais curto. Fernandes (1990) verificou que um desempenho mais regular constitui uma indicação mais forte do que um desempenho mais irregular, em relação à previsão do desempenho em matemática.

Tal como Tversky e Kahneman (1982b), também Pollatsek, Well, Konold e Hardiman (1987) obtiveram evidência acerca da prevalência das inferências de efeitos a partir de causas. Mais especificamente, estes autores concluíram que as dificuldades de avaliação de probabilidades condicionadas resultavam de dificuldades de tradução do enunciado para uma simbologia adequada e suspeitaram que o maior erro de tradução podia ter resultado da confusão entre $P(A|B)$ e $P(A \cap B)$. Segundo estes mesmos autores, o facto de as pessoas disporem de algum esquema que integre acontecimentos do mundo real parece diminuir os erros de tradução e a maior discrepância entre os valores de $P(A|B)$ e $P(B|A)$ permitiu melhorar a realização dos sujeitos nestes problemas.

A profunda adesão à causalidade para avaliar probabilidades condicionadas surge claramente quando as pessoas são confrontadas com a seguinte situação (Falk, 1989):

> Uma urna contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. São extraídas sucessivamente duas bolas da urna sem reposição da primeira bola.
> a) Qual é a probabilidade que a segunda bola seja branca, sabendo-se que a primeira bola é branca?
> b) Qual é a probabilidade que a primeira bola seja branca, sabendo-se que a segunda bola é branca?

A simetria existente entre as questões a) e b), que se traduz na igual probabilidade, é largamente recusada pelas pessoas ao responderem às questões. Falk (1989) constatou que os sujeitos não tiveram dificuldade em identificar a probabilidade de a) como sendo 1/3. Contudo, no caso da questão b), os sujeitos já não lhe atribuíram a probabilidade de 1/3, que é igualmente a resposta correcta. Neste caso, uns sujeitos não responderam à questão por a considerarem sem sentido na medida em que não é possível condicionar a probabilidade de um acontecimento a um acontecimento que ocorreu depois, ou seja, a avaliação de $P(A|B)$ só faz sentido quando B ocorre antes de A. Dos sujeitos que responderam à questão, a maioria deu a resposta 1/2, argumentando que a extracção da segunda bola, que se efectuou depois, não pode influenciar a extracção da primeira bola.

Assim, neste último caso, os sujeitos basearam as suas respostas apenas na composição da urna no início da experiência, ignorando a informação acerca do último resultado.

A concepção errada subjacente à resposta à questão b), baseada no princípio da causalidade e na irreversibilidade do tempo, é conhecida pelo 'Fenómeno Falk'.

Falácia da conjunção. A chamada lei da conjunção, que afirma: – Se $A \subseteq B$, então $P(A) \leq P(B)$, é uma das mais importantes leis de probabilidades. Em consequência desta lei, resulta que $P(A \cap B) \leq P(A)$ e $P(A \cap B) \leq P(B)$. Esta dupla desigualdade designa-se por regra da conjunção e estabelece que a conjunção não é mais provável do que qualquer um dos acontecimentos que a constituem.

Como ilustração, considere-se a seguinte situação probabilística (Fernandes, 1990):

Qual das afirmações seguintes é mais provável?
a) Um ser humano é de cor negra.
b) Um ser humano é de cor negra e nasceu em África.
c) As duas afirmações a) e b) são igualmente prováveis.

Apesar da afirmação a) ser mais provável, pois o conjunto dos seres humanos de cor negra é mais vasto do que o conjunto dos seres humanos africanos de cor negra, os sujeitos avaliaram, frequentemente, a afirmação b) como sendo mais provável (Fernandes, 1990). Para Tversky e Kahneman (1983), uma tal violação da regra da conjunção resulta do facto de o acontecimento B ser altamente representativo do acontecimento A, isto é, o acontecimento 'ter nascido em África' é altamente representativo do acontecimento 'ser de cor negra'. É este fenómeno que Tversky e Kahneman (1983) designam por 'falácia da conjunção', o qual, para além da representatividade, pode ser influenciado pela heurística da disponibilidade e por factores causais.

Tversky e Kahneman (1983) observaram que a violação da regra da conjunção acontece em sujeitos com formação variável em probabilidades e estatística, desde os que não têm qualquer formação em probabilidades até aos "sofisticados". No caso de estudantes portugueses, Fernandes (1990) constatou que a maioria dos estudantes do 11º ano e dos futuros professores de Matemática, que participaram no estudo, aderiram a esta falácia para responder à situação probabilística anteriormente apresentada. É de realçar, ainda, que foram os sujeitos com ensino de probabilidades (futuros professores de Matemática) que em maior percentagem aderiram à falácia.

Considerando que as heurísticas de julgamento probabilístico podem ser aprendidas através da experiência, Agnoli (1987) formulou a hipótese de que a adesão a estas heurísticas seria menos frequente entre as crianças do que entre os adultos, já que estes últimos tiveram mais oportunidades para desenvolver essas heurísticas. Para avaliar esta hipótese, Agnoli conduziu uma experiência junto de sujeitos com 9, 11 e 13 anos de idade em que, para avaliar o efeito da conjunção, foi pedido a cada sujeito que respondesse a seis questões na forma representativa e a seis questões na forma não representativa. Todavia, os resultados obtidos não permitem sustentar tal hipótese, já que os sujeitos de todos os três grupos etários cometeram muitos erros nos problemas apresentados no formato representativo, muitos mais do que no formato não representativo.

2.4. As intuições em probabilidades e o ensino-aprendizagem

Nesta secção trata-se a temática do ensino de probabilidades, com especial referência às intuições probabilísticas. Nesse sentido, apresentam-se implicações para o ensino do carácter multifacetado do conceito de probabilidade, indicam-se estratégias de ensino, dão-se exemplos de experiências de ensino e discutem-se vantagens e desvantagens de um ensino centrado em exemplos contra-intuitivos.

2.4.1. O ensino de probabilidades enquanto conceito multifacetado

As múltiplas interpretações do conceito de probabilidade, a circularidade subjacente às correspondentes definições e as suas limitações em termos de aplicação a situações concretas e reais, contribuem grandemente para a complexidade deste conceito.

Para Steinbring (1991), a circularidade na definição do conceito de probabilidade pode ser mesmo caracterizada de forma mais ampla a partir da dependência mútua entre o objecto a que a probabilidade se refere e o conceito introduzido através do objecto.

Neste sentido, apenas podemos falar de probabilidade se conhecermos os conceitos de experiência aleatória e de aleatoriedade e, reciprocamente, o acaso só pode ser compreendido e especificado matematicamente depois de ser introduzido o conceito de probabilidade.

A operacionalização da probabilidade via frequência relativa significa que os conceitos não são explicitamente definidos, mas antes são caracterizados pelo seu uso e aplicação. Contudo, a operacionalização de um conceito matemático não permite revelar completamente o seu significado epistemológico. No caso de uma experiência aleatória, a frequência relativa obtida numa série de experiências não coincide geralmente com a probabilidade. Assim, complementarmente, as aplicações devem ser comparadas e relacionadas de modo a se descobrirem aspectos epistemológicos invariantes do conceito.

No caso do conceito clássico de probabilidade, a redução à equiprobabilidade implica que os processos de abstracção e de idealização desempenham um papel importante na sua aquisição, seja através da abstracção a partir de certas propriedades empíricas, seja através do pressuposto de simetria de certos objectos. O facto de a probabilidade não ser simplesmente uma quantidade fixa, sendo também uma quantidade aleatória que varia em experiências repetidas, implica que o conceito de probabilidade não é apenas o resultado da abstracção e idealização de propriedades empíricas. Para além disso, ele deve modelar desvios desta estrutura ideal.

Assim, podemos concluir que cada uma das interpretações de probabilidade revela aspectos do significado dos conceitos probabilísticos básicos que são ocultados pela outra. Consequentemente, devemos começar com definições limitadas e relativizadas e recorrer a exemplos para obter explicações dos conceitos de aleatoriedade e de probabilidade.

O facto de os conceitos básicos não poderem ser definidos de antemão, sendo progressivamente desenvolvidos ao longo do processo de ensino, destaca o carácter teórico deste conhecimento. Para Streinbring, o carácter teórico do conhecimento matemático traduz a dependência dos conceitos e dos seus significados em relação ao nível de desenvolvimento da teoria. "Nesta perspectiva, os conceitos não são simplesmente os fundamentos da teoria, mas reciprocamente, é a teoria que explica e desenvolve o significado de conceitos matemáticos" (Steinbring, 1991, p. 144). O conceito de aleatoriedade é um exemplo paradigmático desta situação.

Para Steinbring, o princípio de que os conceitos estocásticos devem ser compreendidos como elementos da matemática e como objectos relacionados a um contexto de aplicação, ao revelar o carácter complementar destes conceitos básicos, apresenta muitas vantagens:

(1) Favorece uma perspectiva dinâmica do conhecimento e uma melhor compreensão da relação entre intuições subjectivas e situações aleatórias objectivas e os seus modelos matemáticos. Neste caso, o estudante começa por fazer julgamentos pessoais acerca da situação aleatória apresentada e a comparação da situação empírica com os modelos planeados conduzi-lo-á a generalizações, a caracterizações mais precisas e a *insights* mais profundos.

(2) Previne a redução conceptual, alicerçada apenas em cálculos matemáticos ou apenas em intuições empíricas, e exclui a possibilidade do desenvolvimento de uma única concepção de probabilidade, seja uma concepção puramente objectivista ou uma concepção puramente subjectivista.

(3) Inibe um método de ensino hierárquico, começando com representações de aplicações relacionadas com o conteúdo e passando depois à utilização de símbolos, fórmulas e modelação matemática, que representam uma abstracção da situação real. Diferentemente, a inter-relação entre o objecto e o modelo deve manter-se ao longo de todo o processo de ensino.

(4) Destaca duas categorias de representação do conhecimento: a 'categoria de distribuição' e a 'categoria de diagramas de árvore'. A categoria de distribuição, relativa ao processamento de frequências, inclui tabelas, folhas de contagem, sectogramas, gráficos de tronco-e-folha, gráficos de barras, histogramas, polígonos de frequências, etc. A

categoria de diagramas de árvore, que trata fundamentalmente do cálculo de probabilidades, inclui tabelas, diagramas de árvore completos e reduzidos, diagramas de árvore 'infinitos', o triângulo de Pascal e o ábaco de probabilidades.

O carácter teórico e complexo do conhecimento estocástico limita a sua consistência interna e a sua hierarquia lógica. Consequentemente, uma estratégia de ensino centrada em aspectos estruturais, a partir da álgebra de Boole e da teoria de conjuntos ou da definição clássica de probabilidade e de técnicas de contagem, apesar de facilitarem uma apresentação metódica, elegante e estruturada, não dá resposta ao carácter dual entre objecto e modelo que intervêm no desenvolvimento dos conceitos básicos de probabilidades. Steinbring destaca ainda as limitações de um ensino em que os conceitos são desenvolvidos através de um modelo concreto e universal, tal como o modelo da urna e o modelo da roleta. Muito embora estes modelos possam ser úteis para revelar a estrutura matemática e a ordem lógica e como meio de modelação de situações reais, a sua utilização exclusiva comporta o risco do modelo escolhido tornar-se ele próprio o único objecto de ensino para a construção conceptual estocástica.

Para contemplar o carácter dual entre objecto e modelo, Steinbring (1991) propõe que a actividade de ensino se desenvolva a partir de sistemas de tarefas. Partindo de tarefas, que constituem as mais pequenas unidades de actividade na sala de aula, torna-se necessário reuni-las num sistema de acordo com certas relações. Assim, as tarefas devem relacionar-se com um objecto comum, mesmo que de perspectivas diferentes, e devem ser análogas entre si. As tarefas serão análogas na medida em que sejam semelhantes através de uma certa relação entre as suas partes respectivas e ao mesmo tempo manterão sempre alguma diferença entre si, ou seja, as partes individuais são semelhantes sob um aspecto global e distintas nos seus aspectos locais.

Para construir tarefas análogas podemos recorrer a duas estratégias importantes: variar as constantes do problema e alterar o modelo. Consideremos, a título de exemplo, o conhecido problema do aniversário.

> Reuniram-se numa sala n pessoas para fazerem uma festa. Qual é a probabilidade de pelo menos duas dessas pessoas terem o seu aniversário no mesmo dia do ano?

Em vez do dia de nascimento, podemos considerar o mesmo problema em relação à semana de nascimento ou ao mês de nascimento. Variamos, assim, constantes do problema. Mas podemos também alterar o modelo do problema aumentando o número de pessoas com o mesmo aniversário. Por exemplo, a substituição de 'pelo menos duas pessoas' por 'pelo menos três pessoas' conduz a novas dificuldades.

Observe-se, por fim, que a variação de constantes tem fundamentalmente o propósito de desenvolver e consolidar *skills*, enquanto a alteração do modelo entre tarefas análogas enfatiza o conceito matemático e o seu desenvolvimento.

Para Steinbring (1989) e Fischbein (1975), os alunos crescem em torno de uma visão determinista do mundo. Esta perspectiva determinista é também consolidada em matemática a partir da ênfase dada às respostas correctas únicas e à dedução. Todavia, a estatística trata de inferência e não de dedução, e podem-se efectuar várias inferências do mesmo conjunto de dados, cada uma com uma certa probabilidade de ser verdadeira. Em consequência da persistência da visão determinista, os alunos devem ser expostos a muitos exemplos que envolvam o pensamento estocástico para que abandonem uma tal perspectiva, para que reconheçam as situações em que devem usar a dedução e as situações em que é mais apropriado recorrer à inferência e para efectuar tal inferência.

Numa perspectiva estrutural, os conceitos matemáticos adquirem os seu significado indirectamente através de relações codificadas dentro dos axiomas e dos teoremas que podem ser provados (Borovcnik, 1991). Contudo, antes dos conceitos serem clarificados ou enquanto estão a ser construídos, intervém algum tipo de imaginação que actua como força motriz no desenvolvimento de uma teoria matemática. Estas ideias intuitivas, apesar de apenas serem parcialmente abordadas na comunicação matemática formal, desempenham um papel decisivo na descodificação da teoria.

Para Borovcnik (1991), parece existirem ligações entre as intuições e a teoria matemática. Cada um destes dois aspectos, que não é possível separar, é necessário à compreensão do outro. É a esta dualidade epistemológica que intervém no conhecimento matemático que este autor chama 'complementaridade'.

Segundo o mesmo autor, a aprendizagem de uma teoria necessita de esforços cognitivos semelhantes ao desenvolvimento de uma teoria. Considerando as intuições primárias e secundárias, caracterizadas por Fischbein (1987, 1990), Borovcnik preconiza que a acção recíproca entre as intuições e a matemática conduzirão a uma revisão e a um refinamento das intuições, que culminará com a compreensão da teoria abstracta. Assim, partindo das intuições primárias, desenvolver-se-ão novas intuições através do ensino, que, por sua vez, permitirão a aquisição de níveis matemáticos mais elevados.

Na vertente intuitiva há uma grande vontade de ordenar o caos inerente à incerteza. Contudo, se o indivíduo não pode clarificar a situação ao nível intuitivo, então serão activadas diferentes teorias matemáticas alternativas, como ligações causais, padrões lógicos ou ligações astrológicas, em ordem a resolver o caos.

Considerem-se as questões: 'O que significa a afirmação de que a probabilidade de obter a face cara no próximo lançamento de uma moeda é 1/2?' e 'Que tipo de informação fornece o valor da probabilidade para prever o resultado do próximo lançamento?' A teoria causal, apesar de parecer prometedora na medida em que se tem uma impressão global do seu poder, é fonte de muitas confusões resultantes de conflitos entre exigências intuitivas e teóricas. Por exemplo, a alteração do contexto de lançamento de uma moeda para uma ficha com uma face vermelha e outra azul, conduziu a variações significativas das respostas dadas pelos sujeitos (Green, 1983).

A procura de um padrão revela-se uma estratégia eficaz, na medida em que conduz a uma solução específica para o problema da previsão do resultado do próximo lançamento. Todavia, não é fácil construir uma intuição secundária baseada na lei dos grandes números. No caso de se ter obtido a sequência CCCCC em cinco lançamentos consecutivos de uma moeda, a adesão à lei dos grandes números (na sua vertente intuitiva) podia conduzir à preferência pela face E, pois as frequências relativas tornar-se-iam mais próximas de 1/2.

Uma outra intuição secundária para esta probabilidade de 1/2 podia resultar do seu cálculo como *odds* de 50:50. Esta estratégia potencializaria a consideração de apostas iguais numa única jogada. Portanto, mesmo que uma afirmação de probabilidade não permita prever um resultado específico, ela é uma base razoável para negociar apostas numa jogada.

Além disso, diferentemente do que acontece em outros ramos da matemática, o *feedback* exterior é muito fraco e indirecto. No contexto de um jogo de sorte-azar, como aceitar que a partir de uma boa compreensão da situação e da escolha de uma estratégia adequada se perca o jogo? Ou ao contrário, como convencer uma pessoa dos seus erros e limitações quando ganha o jogo com base numa estratégia sem sentido?

Todas as estratégias referidas destacam que "há uma necessidade urgente de estabelecer conexões entre os níveis intuitivos e teóricos em ordem a facilitar a compreensão de conceitos abstractos" (Borovcnik, 1991, p. 368). A educação em probabilidades deve, então, ajudar a estruturar as ideias intuitivas de modo a passar-se de um mundo de intuições vagas para um outro ordenado.

Finalmente, a acessibilidade ao nível intuitivo está dependente do tipo de abordagem adoptada. O pensamento lógico é difícil, mas uma vez reconhecidas as relações lógicas subjacentes ele é completamente aceite, o pensamento causal é intuitivamente muito convincente e o pensamento estocástico é muito teórico. Consequentemente, é tarefa do ensino desenvolver intuições secundárias que clarifiquem como este pensamento estocástico se relaciona com as outras duas abordagens.

Referindo-se às necessidades de formação contínua de professores até ao primeiro ano do ensino secundário, Steinbring (1989) preconiza que uma tal formação não pode ser a teoria formal de probabilidades e estatística. Diferentemente, este autor distingue três níveis no conhecimento estocástico relevantes para os professores: (1) a estrutura técnica do conteúdo, (2) o aluno que aprende probabilidades e estatística de forma significativa e (3) o professor que desenvolve uma aprendizagem significativa.

Em relação à estrutura das probabilidades e da estatística, os elementos principais são os conceitos fundamentais, os métodos e os diagramas. Em termos matemáticos, as técnicas exigidas em probabilidades e estatística, a este nível de escolaridade, são simples. O problema real no ensino da estocástica não são os requisitos técnicos, mas o seu uso, a aplicação e interpretação apropriada de conceitos e os métodos e diagramas, ou seja, a relação entre o primeiro e o segundo níveis. No que concerne ao aluno, as questões essenciais são a aprendizagem activa e os meios especiais de representação. Finalmente, os principais papéis do professor prendem-se com a planificação, organização, orientação e avaliação do processo de aprendizagem.

As questões centrais do ensino de probabilidades são: – "Como é possível transmitir os conceitos de aleatoriedade e de indeterminação com a ajuda de conceitos matemáticos deterministas? Como podemos fazer previsões acerca de situações incertas e aleatórias na forma de afirmações matemáticas?" (Steinbring, 1989, p. 205). Estas questões destacam claramente que a estocástica é um conteúdo completamente diferente de outros conteúdos matemáticos. Em consequência, é essencial desenvolver perspectivas e interpretações diferentes quando ensinamos probabilidades e estatística.

Antes do ensino secundário, o conceito de proporção estocástica (por exemplo, frequências relativas, proporções relativas, probabilidades, valores esperados, valores centrais de diferentes tipos e outros valores característicos de uma distribuição) é o conceito matemático elementar necessário para analisar e representar a aleatoriedade em aplicações estocásticas. Contudo, estes valores exactos das proporções estocásticas não são suficientes para reflectirem por si só a natureza específica da aleatoriedade. É imprescindível um contexto de referência no qual possa ser avaliado o carácter aleatório destes valores.

É apenas a relação entre os conceitos formais e os contextos de significação que podem acentuar, realmente, a natureza da aleatoriedade e da incerteza. As representações gráficas e visualizações são instrumentos matemáticos adequados para enfrentar com êxito a aleatoriedade numa vertente matemática. Os diferentes meios usados para visualizar distribuições empíricas e teóricas (por exemplo, sectogramas, gráficos de barras, histogramas, gráficos de tronco-e-folhas, etc.) oferecem contextos matemáticos específicos que ajudam o aprendiz a compreender, quantitativamente e qualitativamente, a aleatoriedade e a incerteza.

Muito embora as aplicações e os diagramas desempenhem um papel fundamental na transmissão da natureza da aleatoriedade no ensino das probabilidades e estatística, um tal percurso é muito estranho para a maioria dos professores. No caso das aplicações, consideram-nas como motivações extra-matemáticas que são dispensáveis; no caso dos gráficos e diagramas, vêem-nos como ilustrações simplificadoras (Steinbring, 1989).

Nesta perspectiva de dualidade, o *Schools Project on Statistical Education* advoga que o desenvolvimento dos conceitos estocásticos deve reger-se por três princípios:

> "Os conceitos e técnicas serão desenvolvidos num contexto prático.
> As técnicas não serão necessariamente desenvolvidas completamente na primeira vez que surjam. Muitas das ideias introduzidas pela primeira vez nos primeiros anos surgirão em anos seguintes.
> Não é necessário nem desejável uma completa justificação teórica para todos os tópicos. Alguns itens serão tratados apenas em problemas particulares e outros conceitos serão abordados apenas através de experimentação e não serão justificados teoricamente." (Citado em Steinbring, 1989, pp. 206-207)

Para Steinbring, a exigência de um ensino "aberto", que contemple resultados inesperados e imprevistos, constitui também uma fonte de dificuldade para a maior parte dos professores. Usualmente, segue-se no ensino da matemática uma estrutura lógica e hierárquica. Assim, o facto de não se poder previamente preparar por completo o ensino, faz com que muitos professores evitem definitivamente ensinar a estocástica na sala de aula, pois não se sentem à vontade com um tal tipo de ensino. O desconforto dos professores estende-se também ao caso das aplicações. Em qualquer caso, os professores preferem situar-se no que para eles parece constituir a segurança e os fundamentos seguros dos conceitos e estruturas intra-matemáticas.

Ainda, segundo Steinbring, há duas razões opostas pelas quais os professores não gostam de ensinar estocástica. Por um lado, se o conteúdo é confinado ao seu conteúdo matemático de conceitos, métodos e diagramas, então o conteúdo pareceria trivial para muitos professores e, por isso, não merecedor de fazer parte do ensino da matemática.

Por outro lado, se a estocástica é vista em relação íntima com situações que são indeterminadas em virtude dos seus elementos estocásticos, então muitos professores receiam que as exigências pedagógicas do ensino de probabilidades e estatística excedam as suas capacidades.

Portanto, os materiais usados para treino de professores em serviço e aqueles que se destinam a usar na sala de aula devem reflectir toda a complexidade do processo de ensino-aprendizagem. Neste sentido, a diversidade das responsabilidades dos professores implica que o metaconhecimento de que necessitam se situe pelo menos a quatro níveis:

> "(a) o conhecimento estocástico em relação ao nível pessoal (a significação pessoal para o professor); (b) o nível didáctico (a incorporação da estocástica no currículo escolar); (c) o nível de ensino (a organização do ensino da estocástica na sala de aula); e (d) o nível de aprendizagem (tarefas e actividades estocásticas para os alunos)." (Steinbring, 1989, p. 208)

2.4.2. Estratégias de ensino de probabilidades

Borovcnik e Peard (1996) reúnem em três categorias as estratégias para desenvolver uma adequada compreensão do conceito de probabilidade: (A) numa incluem-se a simulação, a visualização e as analogias, estratégias que simplificam de algum modo as relações matemáticas envolvidas; (B) numa outra categoria integram-se as aplicações, distinguindo-se problemas artificiais, pseudo-reais e reais; (C) finalmente, na terceira categoria incluem-se as estratégias intuitivas, destacando-se a matematização, a entrevista orientada e a representação inovadora do formalismo.

A. Estratégias que simplificam as relações matemáticas

Simulação. A principal razão para usar a simulação no ensino de probabilidades advém da dificuldade em ir além dos tradicionais jogos de sorte-azar e de problemas simples através de outros métodos, designadamente recorrendo a métodos analíticos e combinatórios. Já, por exemplo, a utilização do método de simulação de Monte Carlo, mesmo sem o apoio de computadores, permite abordar situações mais realistas e resolver problemas mais sofisticados.

O método de simulação de Monte Carlo foi desenvolvido durante a II Guerra Mundial por um grupo de matemáticos, incluindo John von Neumann e S. M. Ulam, para resolver problemas que surgiram na concepção de reactores atómicos. Posteriormente, com o surgimento e difusão dos computadores, o método passou a ser aplicado na indústria (Watkins, 1981; Travers, 1981).

Do ponto de vista educativo, para Watkins (1981), o método de Monte Carlo permite ensinar os alunos a representar um sistema do mundo real em termos de relações matemáticas. Concretamente, os alunos têm de aprender a isolar aspectos críticos num problema, decidindo acerca da independência das experiências, averiguando a equiprobabilidade dos resultados e atribuindo probabilidades a esses resultados. Seguidamente, o aluno tem de efectuar as operações que lhe permitam resolver o problema. Neste caso, Travers (1981) refere cinco etapas na utilização do método de Monte Carlo: (1) escolher um modelo apropriado (moedas, dados, roletas, urnas, tabelas de números aleatórios ou geradores de números pseudo-aleatórios); (2) estabelecer em que consiste uma experiência; (3) definir experiência sucedida; (4) repetir a experiência um número apropriado de vezes; e (5) determinar a probabilidade ou valor esperado, dividindo o número de experiências sucedidas pelo número total de experiências realizadas.

Em termos de sequencialização curricular, Watkins (1981) advoga que o método de simulação de Monte Carlo constitui uma boa forma de introduzir as probabilidades, destacando o seu potencial para introduzir vocabulário e definições e enquanto etapa prévia à resolução de problemas por métodos analíticos. A facilidade de usar este método para resolver problemas permite que os alunos desenvolvam um sentimento de capacidade para lidar com as probabilidades.

O uso de computadores permite aumentar o poder do método. A este propósito, Travers (1981) afirma que alunos sem qualquer ensino de probabilidades podem resolver alguns problemas e destaca o envolvimento do aluno na actividade e a dimensão concreta do método, enquanto características de um bom ensino.

Segundo Biehler (1991), em contraste com a abordagem analítica, a simulação apresenta três aspectos positivos: (1) o aspecto representacional, que implica que os alunos podem pensar e formular modelos concretos (por exemplo, urnas e roletas) em vez da necessidade de expressar modelos teoricamente em termos de espaços de probabilidade; (2) o aspecto de cálculo, envolvendo o processamento de dados gerados em ordem a estimar uma probabilidade; e (3) o aspecto do conceito de modelo, que implica conceber uma experiência e pensar um modelo antes de efectuar cálculos sem sentido e intencionalidade.

Para destacar vantagens na utilização de computadores em probabilidades, Inhelder (1981) refere que, antes do acesso generalizado a computadores, os professores podiam recorrer a duas abordagens no ensino de probabilidades: (1) efectuar manualmente uma experiência um número significativo de vezes e (2) resolver o problema numa perspectiva *a priori*, usando as leis do cálculo combinatório e a teoria de probabilidades. Todavia, na primeira abordagem, os constrangimentos físicos e de tempo limitam seriamente a natureza e o âmbito dos problemas que podem ser tratados. Na segunda abordagem, exige-se um nível de sofisticação matemática que, frequentemente, está para além das possibilidades do aluno. Consequentemente, a utilização de computadores é vista como uma possibilidade de aumentar o leque de situações probabilísticas ao alcance dos alunos. Durante esta fase de simulação, o aluno tem a oportunidade de descobrir ou conjecturar a regra ou princípio subjacente, esperando-se que ele fique mais motivado para aprender as leis combinatórias e de probabilidades necessárias à prova.

Em relação à utilização de um programa de computador, Kellogg (1981) salienta que os alunos devem ser encorajados a modificar os programas para variar a simulação. Alternativamente, o que parece ser mais realista, podemos variar a simulação variando os valores de certos parâmetros (Kader, 1991).

Referindo-se ao projecto *Simulation in Mathematics-Probability and Computing*, dirigido a alunos do ensino secundário avançado e do ensino superior, Kader (1991) afirma que muitas apresentações introdutórias de probabilidades tratam o tema de modo estático, significando que são focalizadas no comportamento de uma única experiência e centradas numa perspectiva formal, enfatizando o modelo matemático construído a partir dos axiomas. Em resultado de uma tal abordagem, é usual que o aluno seja capaz de calcular uma probabilidade sem, no entanto, lhe atribuir qualquer interpretação significativa. Diferentemente, o uso de computadores permite criar um contexto em que os alunos experienciem os conceitos probabilísticos de modo dinâmico.

Para Kader, cada actividade do aluno, em cada modelo de simulação, desenvolve-se em quatro fases: (1) apresentação de um problema; (2) desenvolver uma simulação manual para modelar o problema, usando as diferentes etapas do processo de modelação; (3) desenvolver uma simulação em computador para modelar o problema; e (4) explorar o modelo de simulação. Constata-se, assim, a importância atribuída à simulação manual, em que são estimadas várias probabilidades diferentes para o mesmo problema, a par da simulação em computador.

No caso da simulação em computador, o estudo do problema deve iniciar-se em modo visual, de modo a proporcionar uma transição da actividade manual para a simulação em computador (por exemplo, representa-se graficamente os resultados de uma experiência). Seguidamente, a informação apresentada, na forma gráfica ou numérica, distancia-se mais dos resultados obtidos (por exemplo, depois de simuladas muitas experiências, procura-se identificar regularidades e padrões). Por fim, depois de completa a simulação e a partir dos resultados obtidos, são colocadas várias questões aos alunos. Para Kellogg (1981), do ponto de vista do ensino, as representações gráficas são frequentemente usadas nas melhores simulações.

Biehler (1991) distingue duas perspectivas na utilização da simulação. Uma consiste em usar a simulação como método de resolução de problemas, semelhante à utilização profissional fora da escola. A outra resulta de usar a simulação como meio de proporcionar ambientes-modelo, que compensam a falta de experiência. Esta falta de experiência para apoiar a aprendizagem de probabilidades tem origem nos constrangimentos de tempo e de recursos limitados que não permitem desenvolver oportunidades suficientes para adquirir tal experiência.

Contudo, o recurso à simulação tem também consequências negativas. Borovcnik e Peard (1996) destacam o facto de que a solução obtida por simulação não fornece quaisquer pistas de como e porquê a solução resolve realmente o problema e, ao basear-se numa perspectiva frequencista de probabilidade, não se consideram outras visões do conceito de probabilidade. Outra questão importante, consiste em decidir se devemos privilegiar a simulação usando calculadoras ou computadores, ou usando objectos aleatórios concretos. Para além do carácter pseudo-aleatório dos números gerados por calculadoras e computadores, que deve ser confrontado com a aleatoriedade genuína gerada pelos objectos aleatórios, estes últimos constituem-se como modelos cognitivos que podem ser usados como primeira etapa da modelação. Face a esta questão, Borovcnik e Peard (1996) propõem que, na primeira abordagem de probabilidades, os alunos utilizem na simulação objectos aleatórios concretos e que, seguidamente, estabeleçam comparações com simulações em computador.

Especificamente, no caso da utilização de computadores, Shaughnessy (1992) refere-se a duas preocupações. A primeira prende-se com o papel do professor em contextos computacionais. Neste caso, preconiza-se que os professores sejam envolvidos durante todo o processo de desenvolvimento dos produtos computacionais, e não apenas que sejam assistidos na utilização de produtos acabados. A segunda, centra-se na importância de não abandonar completamente representações mais concretas de experiências estocásticas. Nesse sentido, parece ser da maior importância para muitos alunos ter experiência em gerar e reunir os seus próprios dados fisicamente, recorrendo a objectos aleatórios concretos (por exemplo, dados ou roletas).

Também para Travers (1981), o método de Monte Carlo não responde a todas as dificuldades no ensino de probabilidades e estatística. Especificamente, a utilização do método ao exigir uma planificação cuidada por parte do professor e uma atenção especial às respostas dos alunos, implica uma predisposição crítica para aceitar resultados inesperados. Existe ainda o perigo dos alunos explorarem demasiado rapidamente os problemas, não lhes sendo dada a oportunidade para pensarem cuidadosamente naquilo que fizeram e para passarem com confiança de um nível de pensamento para outro. Em relação a este último aspecto, o perigo é considerável em virtude, talvez, do carácter activo, concreto e de jogo do método.

Para Borovcnik e Peard (1996) o dilema de Monty constitui um exemplo em que se salienta a desvantagem da utilização da simulação na resolução de problemas.

> "Dilema de Monty. Durante um concurso, são mostradas aos concorrentes três portas fechadas. Atrás de uma das portas está um prémio valioso e atrás das outras duas estão dois prémios de consolação. É pedido aos concorrentes que escolham uma porta. Seguidamente, o apresentador do concurso, Monty, abre uma das outras duas portas fechadas e mostra-a ao concorrente, revelando sempre um prémio de consolação. Então, é dada aos concorrentes a opção de manter a sua escolha inicial ou mudá-la para a outra porta não aberta. O que devem fazer os concorrentes?" (Shaughnessy, 1992, p. 475)

Shaughnessy (1992), administrando este problema a estudantes do ensino secundário e do ensino superior, incluindo professores em estágio e em serviço, verificou que muitos estudantes acreditam que, quando Monty abre uma das portas com um prémio de consolação, as chances de ganhar o grande prémio aumentaram automaticamente de 1/3 para 1/2, pois uma das duas portas não abertas tem atrás o prémio valioso. Todavia, se não é realizada nenhuma acção pelo concorrente para aumentar as suas possibilidades de ganhar usando a nova informação, a probabilidade de ganhar o prémio valioso é ainda 1/3.

Para salientar a vantagem em escolher a outra porta, Shaughnessy (1992) considera três estratégias: (1) manter a escolha original; (2) lançar uma moeda ao ar, mantendo a escolha original se sair cara e escolhendo a outra porta se sair escudo; e (3) escolher a outra porta. A simulação de cada uma destas estratégias, recorrendo a uma roleta dividida em três partes iguais e a uma moeda, conduz rapidamente à conclusão que a estratégia mais provável é escolher sempre a outra porta. Contudo, para Borovcnik e Peard (1996) a simulação falha em explicar a razão da não validade da solução intuitiva, que resulta de assumir a equiprobabilidade em relação às duas portas que se mantêm fechadas. Tendo por referência este exemplo, Borovcnik e Peard (1996) afirmam:

> "A simulação nunca pode substituir o pensamento acerca de um problema e nunca pode atacar directamente intuições erradas. Ela serve apenas como uma indicação da localização do erro de um pensamento intuitivo. O processo de clarificação tem de ser prosseguido por outros meios." (p. 263)

Relativamente à simulação como meio de criar ambientes-modelo, Borovcnik e Peard (1996) discutem a questão da convergência empírica das frequências relativas. A simulação usual centra-se no cálculo de sucessivas frequências relativas para um número crescente de experiências. Nesta estratégia, há três questões críticas a considerar: (1) para que valor limite convergem as frequências relativas?; (2) em relação a que convergem?; e (3) com que rapidez convergem para o limite?

Para evitar dificuldades subjacentes a estas questões, Freudenthal (1972) propõe uma estratégia diferente para enfrentar o problema. Para tal, começamos por lançar ou simular o lançamento de uma moeda muitas vezes, digamos 600 vezes. Seguidamente, dividimos a sequência dos resultados obtidos em sequências de comprimento fixo e calculamos, para cada sequência, a frequência relativa do acontecimento 'sair a face cara', por exemplo. Assim, considerando sequências de comprimento cinco, obtêm-se 120 sequências, a que corresponde uma distribuição de frequências relativas com uma dada média e um dado desvio padrão. Considerando, agora, sequências de comprimento 20 e 60, obtêm-se, respectivamente, 30 e 10 sequências, a que correspondem outras distribuições de frequências relativas com certos valores para a média e para o desvio padrão. Ora, verifica-se que, enquanto o valor da média se mantém, o valor do desvio padrão diminui com o aumento do comprimento da sequência. A diminuição da variabilidade das frequências relativas a partir da consideração de sequências com maior comprimento pode ainda ser observada através de representações gráficas, recorrendo a histogramas. Esta estratégia, além de proporcionar um excelente meio de interpretação da lei dos grandes números, permite ainda relacionar a perspectiva frequencista de probabilidade com a perspectiva teórica.

Visualização. Fisher (1988), enfatizando a matemática como meio de representação, classifica as representações visuais em três categorias: (1) a representação icónica, aproximadamente fotográfica; (2) a representação esquemática, que se centra em aspectos específicos; e (3) a representação simbólica, que recorre à simbologia matemática.

Considerando os conceitos como uma rede de relações entre objectos, a visualização permite materializar algumas dessas relações, tornando, assim, essas componentes do conceito mais acessíveis e melhor compreendidas. O facto de estas representações poderem ser submetidas a operações, as quais revelam novas relações do conceito subjacente, implica que a comparação entre operações ao nível esquemático e ao nível simbólico pode conduzir a *insights* mais profundos e à formação de um conceito. Em consequência, nesta perspectiva, a ideia de visualização não está apenas relacionada com o lado contemplativo e representacional da matemática. O facto de se poderem efectuar operações sobre relações visualizadas revela o verdadeiro potencial da visualização para a formação de conceitos. Diferentemente das representações simbólicas, ao nível da representação esquemática não é necessário conhecer convenções, conhecer resultados teóricos ou aprender as representações esquemáticas.

Em termos de visualização, Borovcnik e Peard (1996) destacam os diagramas de árvore, o dispositivo de Galton, as urnas e as roletas. No caso dos diagramas de árvore, eles permitem estruturar uma experiência aleatória repetida e podem ajudar os alunos a visualizar a regra da multiplicação de probabilidades e probabilidades condicionadas. O dispositivo de Galton mantém semelhanças com os diagramas de árvore, fornecendo ainda aos alunos um plano para a simulação sucessiva da experiência, constitui uma simbolização da regra da adição para os coeficientes binomiais e é uma base para uma construção iterativa do triângulo de Pascal. As urnas e as roletas podem ser usadas como mediadores entre o pensamento do indivíduo, o conceito abstracto de probabilidade e uma situação-problema da realidade. Além do efeito da visualização de aspectos importantes da probabilidade, as roletas enfatizam também o conceito de valor esperado (Bentz, 1983).

<u>Analogias</u>. Aqui, a analogia estabelece uma relação entre conceitos matemáticos e um contexto do conteúdo. Porque o contexto apresenta uma visão mais geral, a correspondência entre a matemática e este contexto não é isomórfica. Assim, começando com um contexto familiar ao aprendiz, no qual as relações são directamente compreendidas, ele constitui-se como uma base possível para introduzir o conceito matemático relacionado, o qual pode agora ser facilmente compreendido por referência a esta situação análoga. Estas analogias podem ser estabelecidas também dentro da própria matemática. Neste caso, começamos com conceitos matemáticos conhecidos do aprendiz, procurando-se, seguidamente, que a partir deles o aprendiz estruture uma situação vaga.

No caso das probabilidades, Borovcnik e Peard (1996) apresentam alguns exemplos de contextos em que as analogias revelam um interesse especial. O contexto de apostar pode revelar que a probabilidade é um conceito útil para a tomada de decisões em experiências únicas. Especificamente, o conceito de *odds*, enquanto probabilidade relativa, é o conceito praticado no contexto de apostar. Estes autores advogam que esta estratégia podia vencer a 'estratégia do resultado' usada por muitos indivíduos que aceitam a probabilidade apenas em casos em que ela prediz com certeza o resultado exacto (Konold, 1983, 1991).

No contexto da teoria de erros, pode ser antecipada a lei dos grandes números (de Bernoulli). A analogia começa com a medição repetida de uma quantidade física a. As medições muito grandes e muito pequenas, em relação à medida exacta, eliminarão os seus erros inerentes ao tomar-se a média das medições simples, que por sua vez é uma melhor representação de a que qualquer medição única. Centrada na distribuição de médias com um número fixo de medições e comparando esta distribuição para diferentes e crescentes números de dados, dentro da teoria de erros espera-se obter uma precisão crescente. Em consequência, a probabilidade adquire uma interpretação significativa, sem a previsão de um resultado único.

Por fim, dificuldades com probabilidades condicionadas podem ser ilustradas no contexto de diagnóstico de doenças específicas com base em conhecimento indirecto, sejam testes de sangue, raios X ou outra informação. Do contexto, pode reconhecer-se que a probabilidade condicionada na direcção do estado do paciente para o resultado do teste médico pode ser interpretada causalmente. Contudo, a probabilidade condicionada recíproca, na direcção do resultado do teste médico para o estado do paciente, não pode ser pensada causalmente, constituindo meramente uma indicação. Além disso, o contexto revela a seguinte simetria: um resultado positivo no teste médico pode apenas ser usado como indicação da doença se a presença da doença aumentar a probabilidade de obter um resultado positivo no teste e vice-versa (Borovcnik, 1987). Recorde-se que estas relações entre probabilidades condicionadas em ambas as direcções são muito difíceis de ver no contexto matemático formal.

B. Aplicações

Em relação às aplicações, Borovcnik e Pearl (1996) identificam dois propósitos didácticos para integrar as aplicações no ensino da matemática. As aplicações podem ser usadas na perspectiva de matematização, isto é, para desenvolver conceitos no contexto da situação real, ou na perspectiva de modelação da realidade, que pressupõe que alguns conceitos estão já disponíveis.

Freudenthal (1983) centra a didáctica da matemática na base de fenómenos da realidade que devem ser estruturados através de conceitos teóricos. “Na sua didáctica fenomenológica os conceitos matemáticos constroem-se a partir de objectos mentais que emergem dos esforços individuais para organizar e estruturar fenómenos reais.” (Borovcnik & Pearl, 1996, p. 272)

O grau de semelhança dos exemplos de aplicação com a realidade pode variar consoante a intenção didáctica. Borovcnik e Pearl (1996) consideram três níveis: contextos artificiais, pseudo-reais e reais. Os contextos artificiais, têm a sua principal origem nos jogos de sorte-azar e na teoria de erros. A vantagem em traduzir um certo problema para um contexto de urnas ou roletas pode ser vista enquanto referência a probabilidades numéricas, que podem ser facilmente 'lidas' destes objectos aleatórios, e para promover o pensamento conceptual. "A acção recíproca entre conceitos abstractos, estas imagens materiais e as intuições individuais parece ter um grande potencial para a compreensão mais profunda de todos estes aspectos" (Borovcnik & Pearl, 1996, p. 273). Todavia, as urnas e outros contextos artificiais apresentam também algumas desvantagens específicas, como é o caso das probabilidades condicionadas em relação à inversão temporal ('fenómeno Falk') e ao carácter indicativo.

Os contextos pseudo-reais têm sido introduzidos no ensino das probabilidades, em alguma medida, em reacção à artificialidade dos jogos de sorte-azar. Por outro lado, os problemas reais implicam que os aprendizes tomem decisões muito difíceis na fase de simplificação e de modelação. Assim, os exemplos pseudo-reais constituem um compromisso, diminuindo essas dificuldades e mantendo a motivação inerente aos contextos reais. Especificamente, o contexto pseudo-real tem de ser transposto primeiro para uma situação artificial em ordem a descrevê-lo teoricamente, ou tem de ser transposto para um modelo abstracto codificado simbolicamente, o que não torna as coisas mais fáceis de compreender. Para estes autores, as dificuldades dos exemplos pseudo-reais podem ter duas origens diferentes: os aprendizes têm de estar familiarizados com o correspondente contexto artificial que pode, contudo, estar para além do seu *background* intuitivo e os aprendizes podem não ser capazes de transpor a situação pseudo-real para o contexto artificial.

Finalmente, os projectos constituem formas de ensino adequadas às aplicações reais (Hawkins, 1991). Contudo, para Borovcnik e Pearl (1996) os projectos, com as suas inerentes complexidades e os aspectos e actividades especiais durante a fase de modelação, não parecem constituir a melhor opção ao nível das probabilidades elementares. Os projectos são adequados em estatística descritiva e em estatística inferencial. No caso da estatística descritiva, ela pode ser considerada como motivação para as probabilidades ao nível elementar e, na estatística inferencial, os conceitos probabilísticos elementares têm de já estar disponíveis.

C. Estratégias intuitivas

Borovcnik e Pearl (1996) referem, nesta categoria, os exemplos paradigmáticos que demonstram a utilidade da matemática, a entrevista orientada e a adaptação de ideias formais.

A utilidade da matemática, enquanto instrumento para resolver problemas e para reconhecer a solução como sendo realmente razoável, tem sido sempre uma força motriz para o desenvolvimento da matemática e pode ser usada com vantagem no ensino. Nesta abordagem, são referidas situações contextualizadas que envolvem os conceitos de valor esperado, *odds* e a lei dos grandes números.

A entrevista orientada não significa meramente uma discussão aberta na classe para motivar a introdução de um novo conceito. A existência de intuições primárias, frequentemente contrárias aos conceitos probabilísticos (Fischbein, 1987), exige que estas ideias inadequadas sejam enfrentadas directamente no processo de ensino. O ensino na forma de entrevista deve confrontar o estudante com questões e imagens que desencadeiem reacções imediatas, primeiro, através de testes escritos e, seguidamente, recorrendo-se a conversas individuais ou a discussão na turma. O momento de discussão aberta é fundamental para clarificar os significados que os alunos atribuem aos conceitos e a entrevista permite identificar pontos fracos na compreensão e articular as intervenções de ensino.

No ensino baseado em entrevistas, o professor deve explorar acções provocativas, recorrendo, por exemplo, a variações de contexto e a questões que forneçam aos alunos *insights* de que as suas concepções são erradas. No caso do 'fenómeno Falk', Falk (1989) propõe a exploração de uma situação mais extrema de modo a salientar o absurdo da utilização de um raciocínio causal. Para tal, considerando que a urna contém duas bolas brancas e duas bolas pretas, a experiência consistirá agora em extrair, sem reposição, sucessivamente três bolas, sabendo-se que a segunda e terceira bolas extraídas são brancas. Torna-se então claro que esta informação dissipa toda a incerteza em relação ao resultado da primeira extracção, sendo, consequentemente, fácil de aceitar a relevância da informação indicativa. Nesta abordagem, a necessidade lógica sobrepõe-se à causalidade.

Borovcnik e Pearl (1996) verificaram a eficácia desta estratégia, variando o contexto através do aumento do número de bolas da urna. Uma outra variação do contexto, que se revelou igualmente efectiva, consistiu em tornar a situação mais viva de modo a demonstrar-se a simetria entre as duas questões. Assim, extraiu-se uma bola com a mão esquerda e, seguidamente, extraiu-se outra bola com a mão direita e começou-se por abrir ora a mão esquerda ora a mão direita, questionando-se os estudantes sobre a probabilidade de estar uma bola branca na outra mão. Em consequência, muitos estudantes abandonaram o raciocínio causal e aderiram à simetria. Em relação aos estudantes que ainda mantinham ideias causais, os autores diminuíram o tempo entre as extracções feitas com cada uma das mãos, tornando-o irrelevante ou fora de controlo. Na ausência de controlo, alguns estudantes, mais orientados causalmente, afirmaram que não se podia atribuir qualquer probabilidade. Para estes sujeitos, foi necessário recorrer à extracção sucessiva para vencer o raciocínio causal.

As características matemáticas íntimas de um conceito são apenas um aspecto da aprendizagem do conceito. Relacionar estas características com ideias intuitivas dos indivíduos ajuda-os a compreender e a aceitar resultados teóricos.

Borovcnik e Pearl (1996) ilustram a ideia de reformular fórmulas para melhor reponderem às necessidades da compreensão intuitiva no contexto do 'fenómeno Falk' e da fórmula de Bayes. Em ambos os casos, o recurso ao conceito de *odds* torna mais simples o conceito de probabilidade condicionada. Em relação ao 'fenómeno Falk', tem-se: (1) no caso da questão sequencial no tempo, as chances de obter primeiro bola branca e depois bola branca contra obter primeiro bola branca e depois bola preta, dado que saiu primeiro bola branca, são de 1:2; (2) no caso da questão de reversão do tempo, as chances de obter primeiro bola branca e depois bola branca contra obter primeiro bola preta e depois bola branca, dado que a segunda bola é branca, são também de 1:2.

2.4.3. Experiências de ensino de probabilidades

Shulte (1968) conduziu um estudo sobre uma unidade de ensino de probabilidades e estatística em alunos do 9º ano. A unidade foi ensinada pelos professores de matemática nas 18 turmas que constituíram o grupo experimental, enquanto no grupo de comparação participaram 17 turmas que não estudaram a unidade.

Na unidade de probabilidades e estatística, observou-se que o grupo experimental obteve realizações significativas em probabilidades, em permutações e combinações e em estatística. Estes alunos aprenderam conceitos e foram capazes de efectuar cálculos sobre probabilidades, permutações e combinações, medidas de tendência central, medidas de dispersão e coeficientes de correlação.

Em relação a *skills* de cálculo em matemática, verificou-se que o grupo de comparação obteve melhores resultados. De entre os vários domínios de cálculo – adição, subtracção, multiplicação e divisão –, o grupo experimental superou o grupo de comparação apenas na multiplicação. No caso das compreensões matemáticas, a unidade melhorou a capacidade dos alunos do grupo experimental trabalharem com gráficos e tabelas e favoreceu o desempenho em matemática. Ambos os grupos progrediram em simbolismo matemático e fórmulas, e o grupo de comparação progrediu mais na resolução de equações simples.

Em termos de atitude em relação à matemática, observou-se que o grupo experimental piorou a sua atitude e, no caso da atitude em relação à utilidade da matemática, ambos os grupos melhoraram ligeiramente. Em relação aos professores, as suas atitudes não parecem ter mudado muito em resultado do ensino da unidade.

A partir dos resultados obtidos, Shulte recomenda que a unidade de probabilidades e estatística é um tema adequado ao nível do 9º ano, pois os alunos podem aprender o conteúdo e gostam de muitos dos seus tópicos. Todavia, o seu ensino não pode ser justificado na base de um maior interesse dos alunos nem como um meio mais eficaz de desenvolver *skills* de cálculo. Já em termos de compreensões matemáticas, podemos considerar a sua inclusão no estudo da matemática ao nível do 9º ano.

Partindo do pressuposto que o ensino tradicional não é uma estratégia adequada para vencer as concepções erradas dos estudantes acerca de probabilidades, Shaughnessy (1977) implementou uma experiência de ensino em pequenos grupos, baseada em actividades e dirigida à construção de modelos de probabilidades e estatística para ajudar estudantes universitários a ultrapassarem algumas das suas concepções erradas, especificamente, as heurísticas da representatividade e da disponibilidade.

No estudo participaram 80 estudantes universitários, dos quais 40 foram submetidos ao curso experimental e os restantes ao curso tradicional. De todos os sujeitos que participaram no estudo, apenas sete tinham tido algum ensino em probabilidades.

No caso do grupo experimental, exploraram-se nove actividades, tendo os estudantes trabalhado em pequenos grupos de quatro ou cinco elementos. Em cada actividade pretendia-se que os grupos reunissem dados, organizassem e analisassem dados e, finalmente, que chegassem a conclusões na forma de princípio ou modelo matemático. Os estudantes foram fortemente encorajados a cooperar entre si e a constituição dos grupos foi frequentemente alterada, tendo em vista a possibilidade de que cada estudante pudesse trabalhar com qualquer um dos demais. O papel do professor foi de organizador, diagnosticador e crítico. Às perguntas formuladas pelos estudantes, o professor respondeu com outras perguntas em ordem a encorajá-los a trabalharem por si próprios e a restringir as orientações ao mínimo necessário. No caso do grupo de controlo, foi seguido um livro escolar sobre os mesmos assuntos tratados no grupo experimental.

Os dados obtidos resultaram das respostas dadas por todos os sujeitos a dois instrumentos, um pré-teste e um pós-teste. No caso do pós-teste, que foi administrado passadas quatro semanas após ter terminado o ensino de probabilidades, era constituído por 20 questões no formato de escolha múltipla e em todas elas pedia-se que o sujeito apresentasse uma justificação para a resposta escolhida. Além disso, foi dito aos sujeitos que os resultados do teste não tinham qualquer influência na classificação e dispuseram de apenas 50 minutos para responder ao teste.

Os resultados obtidos mostraram que o curso experimental foi mais sucedido em vencer as heurísticas da representatividade e da disponibilidade do que o curso tradicional, tendo sido mais eficaz no caso da heurística da representatividade. Neste último caso, obtiveram-se diferenças estatisticamente significativas entre os grupos, o que já não se verificou para a heurística da disponibilidade.

Em termos de ensino, os alunos revelaram uma atitude muito positiva em relação ao curso experimental. Alguma frustração inicial, consequência do professor não ter fornecido as respostas, regras ou fórmulas, não foi observada no fim do curso na maioria dos alunos.

Embora Kahneman e Tversky sejam cépticos em relação à possibilidade de poder ajudar os estudantes a ultrapassarem a confiança que depositam nas heurísticas da representatividade e da disponibilidade, para Shaughnessy os resultados obtidos no pós-teste sugerem que a forma como os estudantes aprendem probabilidades condiciona as suas capacidades para vencer as concepções erradas. Sugere ainda que um curso em que os estudantes trabalhem em pequenos grupos, efectuem experiências, trabalhem em actividades para construir os seus próprios modelos e descubram princípios de contagem pode ajudá-los a vencer concepções probabilísticas erradas.

Agnoli (1987) relata duas experiências de ensino que tiveram um impacto positivo em contrariar a falácia da conjunção. Na primeira experiência, sujeitos adultos, sem ensino de probabilidades, foram treinados no uso de regras lógicas para fazerem comparações extensivas em problemas de representatividade na forma directa (Tversky & Kahneman, 1983). Especificamente, os sujeitos foram treinados em regras lógicas, como a inclusão, a disjunção e a intersecção, recorrendo-se à representação, em diagrama de Venn, de exemplos simples. Além disso, os sujeitos foram também treinados no sentido de considerarem a dimensão da categoria para estimarem a probabilidade de que um elemento seja membro dessa categoria. Segundo o autor, este treino reduziu drasticamente o número de erros de conjunção nestes sujeitos.

Na outra experiência, dois grupos de sujeitos, um de 11 anos e outro de 13 anos, foram confrontados com problemas na forma:

"No Verão na praia, há:
1) mais mulheres ou mais mulheres bronzeadas?
(Questão representativa)
2) mais mulheres ou mais mulheres não bronzeadas?
(Questão não representativa)" (Agnoli, 1987, p. 2)

Analogamente à experiência anterior, o programa de treino contemplou a leitura de representações da inclusão e da disjunção em diagramas de Venn, a representação em diagramas de Venn de categorias lógicas, a apresentação das representações correctas e a explicação da correspondência entre representações em diagrama de Venn e as frequências. Em ambos os grupos etários, estabeleceram-se dois novos grupos, um dos quais foi submetido ao programa de treino e o outro foi considerado como controlo do programa. Tal como na primeira experiência, verificou-se que o treino em regras lógicas diminuiu consideravelmente a frequência de erros em ambas as idades. Além disso, este efeito manteve-se praticamente estável quando os sujeitos foram de novo testados ao fim de 10 dias.

O autor concluiu, assim, que os diagramas de Venn constituíram ajudas perceptivas externas que facilitaram a construção de representações mentais correctas, quando eles os desenharam, ou um instrumento de memória, quando enfrentaram o problema sem explicitamente desenharem o diagrama de Venn.

Com o propósito de avaliar o impacto que o ensino de probabilidades pode ter indirectamente sobre os julgamentos probabilísticos intuitivos, Fischbein e Gazit (1984) implementaram um programa de ensino de probabilidades num grupo experimental constituído por alunos do 5º, 6º e 7º anos de escolaridade (entre os 10 e os 13 anos de idade). Os resultados, obtidos através da administração de um questionário, foram confrontados com um grupo de comparação sem qualquer tipo de ensino de probabilidades. No caso do grupo experimental, avaliou-se, também através de um questionário, em que medida os sujeitos assimilaram e foram capazes de usar os conceitos e procedimentos que lhes tinham sido ensinados.

Para estes autores, as novas atitudes intuitivas apenas se podem desenvolver num ambiente de envolvimento pessoal do aprendiz numa actividade prática, nunca podendo ser modificadas apenas através de explicações verbais. Neste sentido, afirmam que:

> "um programa de ensino que tencione desenvolver um substrato intuitivo aperfeiçoado e eficiente para os conceitos e estratégias em probabilidades, conjuntamente com o correspondente conhecimento formal, deve proporcionar ao aprendiz oportunidades frequentes para experienciar activamente, mesmo emocionalmente, situações estocásticas. Nestas situações, o aprendiz confrontará as suas expectativas plausíveis com resultados obtidos empiricamente." (Fischbein & Gazit, 1984, pp. 2-3)

Em consequência, as 12 lições que constituíram o programa de ensino, incluíram actividades práticas, tais como extrair berlindes de uma caixa, lançar dados e efectuar contagens em situações várias. Além disso, foi particularmente enfatizada a relação entre probabilidades calculadas *a priori* e as frequências obtidas empiricamente.

Em termos de conteúdos, incluíram-se no programa de ensino os seguintes temas: classificação de acontecimentos em certos, possíveis e impossíveis; comparação de chances e probabilidades como medida do acaso; o procedimento para calcular a probabilidade de um acontecimento, quando os resultados possíveis são equiprováveis; o conceito de frequência relativa e a sua relação com a probabilidade; e acontecimentos simples e compostos em experiências simples e compostas.

No caso do questionário dirigido às intuições, incluíram-se questões contemplando a capacidade dos sujeitos identificarem um acontecimento certo; a ideia de sorte, ou seja, a aceitação de uma previsão feita sem considerar uma avaliação séria das chances; concepções erradas típicas, como a heurística da representatividade e o efeito recente negativo; qualidades pessoais do jogador, como a idade e a inteligência, que objectivamente não existem em jogos de sorte-azar; e o raciocínio proporcional.

Ao nível das aquisições conceptuais, os resultados obtidos mostraram um progresso evidente com a idade – 60-70% dos estudantes do 6º ano e 80-90% dos estudantes do 7º ano foram capazes de compreender e usar a maior parte dos conceitos que tinham sido ensinados. No caso dos sujeitos do 5º ano, a maior parte das questões foi demasiado difícil, tendo sido apenas compreendidos os conceitos de acontecimento certo, possível e impossível.

As maiores dificuldades sentidas, mesmo pelos sujeitos mais velhos, verificaram-se no cálculo de probabilidades em experiências compostas em que o resultado considerado resultava da soma do número de pintas obtidas no lançamento de dois dados e em dar exemplos (não em calcular probabilidades) de acontecimentos simples e compostos quando se lança um ou dois dados. No primeiro caso, 30-40% dos sujeitos do 6º ano e 20-30% dos sujeitos do 7º ano cometeram o erro de considerarem 12, em vez de 36, como sendo o número de resultados possíveis. Quanto ao segundo caso, parece que parte destes sujeitos relacionou intuitivamente o conceito de acontecimento simples com um único resultado e a noção de acontecimento composto com mais do que um resultado.

Ao nível das intuições, no caso dos sujeitos do 5º ano, os resultados não são suficientemente fiáveis nem relevantes, pois os resultados do ensino sobre as aquisições conceptuais foram muito baixos e, consequentemente, dificilmente podia ser avaliado o seu efeito indirecto sobre as atitudes intuitivas. Já para os sujeitos do 6º e 7º anos, verificou-se que o programa de ensino teve um efeito positivo sobre os enviesamentos intuitivos comuns (representatividade, tendência a atribuir a qualidade de sorte a sucessos, o efeito recente negativo e a conhecida superstição do papel positivo de começar uma actividade com o pé direito). Em todas estas situações, verificou-se que, geralmente, o processo de ensino actuou no mesmo sentido da idade.

A concepção errada baseada em qualidades pessoais (por exemplo, idade e inteligência) foi rejeitada pela maior parte dos sujeitos, tendo-se verificado um aumento da percentagem de respostas correctas com a idade. Neste caso, o ensino teve, em todos os níveis etários, um efeito negativo.

Em relação aos itens incluídos no raciocínio proporcional, o grupo experimental obteve, em geral, resultados piores do que o grupo de controlo. Já no caso das aquisições conceptuais se tinha verificado num problema que envolvia proporções que, mesmo no 7º ano, 60% destes sujeitos não tinham sido capazes de responder correctamente ao problema. Segundo Fischbein e Gazit (1984), estes resultados sugerem que o pensamento probabilístico e o raciocínio proporcional são baseados em dois esquemas mentais distintos, apesar de ser possível admitir que, a um nível intuitivo muito básico, os dois conceitos partilhem a mesma origem, especificamente baseados na intuição da frequência relativa (Fischbein, 1975).

Finalmente, em termos didácticos, Fischbein e Gazit (1984) advogam que a implementação de um programa de ensino sistemático sobre probabilidades pode ser iniciada sem dificuldades particulares no 6º ano e com maior segurança no 7º ano. Os obstáculos intuitivos, entretanto identificados, podem ser vencidos melhorando o programa. Este curso em probabilidades (incluindo actividades práticas) pode ter uma influência positiva e benéfica sobre as intuições erradas. Por último, as dificuldades sentidas no raciocínio proporcional podem ser vencidas imaginando exercícios especiais nos quais os estudantes são confrontados com cálculos de proporções e as respectivas implicações para efectuar estimativas de probabilidade.

Num sentido diferente, Cox e Mouw (1992) realizaram um estudo com o fim de romper com a influência da heurística da representatividade nos julgamentos probabilísticos. Contrastando com os estudos anteriormente referidos (Agnoli, 1987; Fischbein e Gazit, 1984; Shaughnessy, 1977), em que se tratou de uma intervenção mais ou menos longa, o presente estudo consistiu numa intervenção curta, em que a administração dos problemas não excedeu os 60 minutos.

Neste estudo explorou-se o facto de o contexto da situação parecer fornecer sinais, enquanto características essenciais da evidência, que são frequentemente usados na determinação subjectiva de probabilidades. Assim, os problemas foram apresentados de modo que os sujeitos pudessem experienciar uma contradição lógica em relação à utilização da heurística da representatividade. Em termos operacionais, esta discrepância ou inconsistência lógica foi gerada através da adição ou da eliminação de sinais de modo a tornar as soluções anteriores insustentáveis, criando-se, em consequência, um estado de desequilíbrio ou de perturbação. A observação de que as duas situações com que se deparavam tinham essencialmente a mesma forma, poderia conduzir à tomada de consciência de uma tal inconsistência e deveria acarretar alguma forma de reorganização cognitiva em ordem a resolver a inconsistência.

Em termos metodológicos, foram usados neste estudo um grupo de controlo e dois grupos experimentais, um em que foram adicionados sucessivos sinais e outro em que foram eliminados sucessivos sinais. Estiveram envolvidos no estudo 54 sujeitos de uma grande universidade – 27 frequentavam um curso de introdução à estatística e os restantes frequentavam um curso mais desenvolvido de estatística inferencial –, os quais foram integrados ao acaso num dos grupos experimentais ou no grupo de controlo.

Depois de todos os sujeitos terem respondido a um pré-teste constituído por 14 questões, concebido para testar o uso da heurística da representatividade, foi apresentado individualmente a cada sujeito dos grupos experimentais os quatro problemas da experiência, que num dos grupos envolviam a adição sucessiva de sinais e no outro grupo envolviam a eliminação sucessiva de sinais. Para cada um dos problemas, foi-lhes pedido que fizessem determinações intuitivas em vários pontos do problema. No caso do grupo de controlo, foram-lhes apresentadas 10 questões que não envolviam a adição nem a eliminação de sinais. Finalmente, todos os sujeitos responderam a um pós-teste, que foi passado antes de decorrido um dia após o tratamento.

Dos resultados obtidos no estudo, concluiu-se que os grupos experimentais combinados realizaram a um nível superior em relação ao grupo de controlo, tendo-se obtido diferenças estatisticamente significativas entre os grupos. Já, entre os dois grupos experimentais, não se observaram diferenças estatisticamente significativas.

Discriminando as duas formas que a heurística da representatividade pode assumir – uma forma combinatória, que coincide com a falácia da conjunção, e uma forma amostral, quando uma pequena amostra é vista como representativa da população ou quando se espera que uma amostra pareça aleatória –, Cox e Mouw (1992) verificaram uma diminuição significativa do efeito da conjunção em ambos os grupos experimentais, enquanto no grupo de controlo se observaram pequenas mudanças do pré-teste para o pós-teste. Diferentemente, a maior parte dos sujeitos, com maior incidência no grupo de controlo, obtiveram resultados que revelam uma compreensão reduzida do processo de amostragem. Em consequência, é possível que o rompimento do efeito da conjunção nos dois grupos experimentais tenha constituído a maior contribuição para a obtenção de diferenças entre os grupos experimentais (no seu todo) e o grupo de controlo.

Apesar da grandeza dos resultados obtidos não parecer elevada, para estes autores a sua importância tem de ser vista face à dificuldade em substituir as heurísticas de julgamento probabilístico através da aprendizagem de probabilidades em geral. Neste último caso, a natureza autêntica da aleatoriedade torna impossível coleccionar evidência concreta para apoiar o raciocínio probabilístico correcto. Em face deste constrangimento, procurou-se mostrar, univocamente, aos sujeitos que a sua lógica para enfrentar situações probabilísticas era errada.

Numa perspectiva construtivista do processo de reconstrução mental, Fast (1997) advoga que a exploração de intuições ancoradoras, que se desenvolvem através de situações em que o aprendiz chega às respostas correctas, constitui um método plausível para adquirir conceitos matematicamente correctos. Esta estratégia foi já usada antes no domínio da física para vencer concepções erradas (Clement, 1987).

Para Clement uma intuição ancoradora é "uma crença mantida pelo estudante iniciado que é aproximadamente compatível com a teoria física aceite" (Clement, 1987, p. 86). Assim, a exploração de intuições ancoradoras implica o estabelecimento de situações ancoradoras e a identificação de analogias entre estas situações e aquelas que despoletam as concepções erradas, a fim de que seja estabelecida a equivalência entre as duas situações. Este autor propõe que o reconhecimento destas analogias pode beneficiar da identificação de características que se salientam e que são idênticas em ambas as situações, mostrando a existência daquilo que se conserva, usando modelos visualizáveis, recorrendo a demonstrações empíricas e usando a chamada técnica de *bridging*. Esta técnica consiste em encontrar uma terceira situação intermédia entre a situação original e a situação ancoradora análoga. A técnica de *bridging*, ao dividir a analogia em duas etapas mais pequenas, facilita a compreensão, pois, presumidamente, é mais fácil compreender uma analogia próxima do que uma analogia distante. Naturalmente, se necessário, pode recorrer-se a vários casos intermédios de *bridging*.

No caso das probabilidades, Fast (1997) gerou situações ancoradoras a partir da apresentação do problema de uma perspectiva diferente, utilizando situações concretas ou familiares, alterando os valores numéricos de modo a obter-se um caso extremo e utilizando gráficos.

Em termos metodológicos, foram usados no estudo dois questionários, um com 10 situações propensas à adesão a concepções erradas e outro com as correspondentes 10 situações ancoradoras. As questões foram apresentadas no formato de escolha múltipla e incluíam justificações e níveis de confiança para as respostas escolhidas. Participaram no estudo 24 estudantes universitários (futuros professores de matemática), 15 dos quais foram também entrevistados numa base de voluntariado.

Depois de terem respondido ao primeiro questionário, cujos resultados revelaram a existência de concepções probabilísticas erradas entre estudantes universitários, os sujeitos responderam imediatamente ao outro questionário, que constituía uma versão modificada do primeiro no sentido de incluir situações ancoradoras. Durante a semana seguinte, decorreram as entrevistas com o propósito de aprofundar os resultados obtidos, designadamente, para verificar se as respostas erradas no primeiro questionário correspondiam de facto a concepções erradas e para determinar a eficácia do uso de analogias para ultrapassar as concepções erradas.

Os resultados obtidos no estudo mostraram que podem ser geradas situações ancoradoras capazes de vencer as concepções probabilísticas erradas, pois no segundo questionário obtiveram-se cerca de mais dois terços de respostas correctas do que no questionário inicial. Estes resultados positivos foram confirmados nas entrevistas, pois, globalmente, elas foram sucedidas em termos do uso de analogias para vencer concepções erradas.

Apesar destes resultados positivos, nem todas as situações ancoradoras geradas foram igualmente eficazes nem uma dada situação ancoradora provou ser eficaz, enquanto tal, para todos os estudantes. Em termos dos resultados dos questionários, observou-se que as situações ancoradoras geradas a partir da utilização de gráficos e de casos extremos foram as menos eficazes.

A partir das entrevistas, o autor concluiu que a eficácia das situações ancoradoras parece resultar de duas características: os estudantes que venceram as concepções erradas exibiram uma grande confiança nas suas respostas às questões ancoradoras e podiam perceber claramente as analogias entre as situações ancoradoras e as correspondentes situações indutoras das concepções erradas.

Em síntese, considerando a dificuldade em vencer as concepções erradas, Fast (1997) concluiu que a exploração de analogias entre as situações ancoradoras e as situações que despoletam concepções erradas constituiu, de facto, uma estratégia muito eficaz para vencer concepções probabilísticas erradas.

Em alternativa à abordagem tradicional, Castro (1998) definiu e experimentou uma nova abordagem didáctica para o ensino de probabilidades, integrada numa perspectiva de mudança conceptual. O seu modelo de ensino foi estabelecido de acordo com três critérios acerca do processo de ensino-aprendizagem: a questão epistemológica, a questão psicopedagógica e os conteúdos e métodos de ensino. A adesão a uma epistemologia quase-empírica da matemática, incluindo as probabilidades, implica a explicação do conhecimento matemático actual com referência a uma cadeia de conhecimentos matemáticos prévios – na extremidade mais próxima dessa cadeia encontram-se as autoridades matemáticas, os professores e os livros de texto e na outra extremidade mais longínqua encontram-se os conhecimentos matemáticos fundamentais dos nossos antepassados. Em termos de ensino, entre outras consequências, esta visão implica ter em consideração as ideias e conjecturas dos estudantes como verdadeiros predecessores ou alternativas às teorias formais.

Em relação à questão psicopedagógica, o processo de ensino e aprendizagem da matemática foi visto como um processo de mudança conceptual. A adopção de uma estratégia de mudança conceptual, resultante do processo de acomodação, baseou-se em duas razões: primeira, porque o modelo que tem sido considerado para o processo de transformação das ideias alternativas dos estudantes em ideias cientificamente aceites é a própria epistemologia quase-empírica; segunda, apesar de tratar de teorias cognitivas acerca da aquisição de conceitos científicos, a estratégia de mudança conceptual tem também uma clara perspectiva de ensino.

Finalmente, os conteúdos e métodos de ensino deviam respeitar a natureza quase-empírica da teoria das probabilidades e adaptarem-se a um processo de ensino-aprendizagem como mudança conceptual. Em termos da estrutura de uma unidade de ensino e aprendizagem inserida numa perspectiva de mudança conceptual, a atenção centrou-se, em primeiro lugar, na clarificação das ideias dos estudantes, na realização de experiências aleatórias, na aplicação de novas ideias a novos contextos e na revisão de ideias prévias à luz do novo conhecimento. Em termos do papel do professor, além de transmitir informação, ele foi o coordenador e/ou director do processo de ensino-aprendizagem, motivando, moderando, criticando e supervisionando as actividades dos estudantes, com o propósito de que eles constatassem a utilidade das suas ideias prévias ou a necessidade de serem refinadas ou substituídas por outras mais adequadas.

No estudo conduzido por Castro (1998) participaram 136 estudantes do primeiro ano do ensino secundário (14-15 anos), dos quais 75 integraram o grupo experimental e 61 o grupo de controlo. Em termos de avaliação da experiência, integrada num desenho do tipo pré-teste *versus* pós-teste, usaram-se dois questionários, um dirigido a cálculos de probabilidades e outro dirigido ao raciocínio em probabilidades, e um teste de atitudes em relação à matemática.

Tendo por referência as hipóteses de investigação, os resultados do estudo demonstraram que a estratégia de ensino de mudança conceptual, em comparação com o modelo de ensino tradicional, melhorou os *skills* elementares do cálculo de probabilidades e desenvolveu o raciocínio probabilístico intuitivo. Em ambos os casos, obtiveram-se diferenças estatisticamente significativas. Na comparação dos níveis de mudança conceptual observaram-se diferenças estatisticamente significativas entre os dois grupos em sete dos 12 itens considerados, a favor do grupo experimental. Além disso, observou-se que a percentagem de sucessos nos itens contra-intuitivos, que foi muito baixa em ambos os grupos no pré-teste, aumentou significativamente no grupo experimental no pós-teste. Finalmente, a percentagem de sucessos nos itens intuitivos, que foi alta em ambos os grupos no pré-teste, aumentou no grupo experimental e manteve-se ou diminuiu no grupo de controlo.

Comparativamente com o modelo de ensino tradicional, o modelo de ensino de mudança conceptual não determinou diferenças estatisticamente significativas nas atitudes em relação à matemática. Apesar deste resultado, para o autor do estudo, a estratégia de mudança conceptual tem potencial para afectar positivamente a realização e as atitudes em matemática. Neste estudo específico, o autor admitiu que o curto período de intervenção (15 sessões, cada uma com a duração de uma hora) não tenha sido suficiente para alterar as atitudes dos alunos.

A partir destes resultados, Castro (1998) conclui que o ensino de acordo com a estrutura lógica da teoria das probabilidades não é suficiente para considerar as pré-concepções dos estudantes. Neste caso, a estrutura psicológica do aprendiz desempenha um papel fundamental, sendo necessário centrar o ensino de probabilidades numa perspectiva experimental e proporcionar um treino específico do raciocínio probabilístico para garantir a erradicação dos enviesamentos e dos erros de raciocínio dos alunos.

2.4.4. Exploração de situações contra-intuitivas no ensino de probabilidades

Tomando por referência as situações contra-intuitivas, relativamente às quais as pessoas possuem intuições resistentes à perspectiva normativa, Lesser (1995) distingue dois paradigmas de ensino da estocástica: (1) o paradigma tradicional, em que os exemplos contra-intuitivos não são explorados (pelo menos de forma sistemática); e (2) o paradigma alternativo, baseado em exemplos contra-intuitivos.

De entre as dez recomendações para o ensino das probabilidades e estatística, na perspectiva da implementação das Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar (NCTM, 1991), Burrill (1990) afirma na quinta recomendação: " A ênfase no ensino da estatística deve ser colocada em bons exemplos e na construção de intuições, e não em paradoxos de probabilidades ou na utilização da estatística para enganar" (Burrill, 1990, p. 113). Para Lesser (1995), esta abordagem ao ensino da estocástica traduz a posição tradicional por duas ordens de razões: a primeira, reside no facto de ela parecer predominante entre os professores e entre os livros de texto; a segunda, resulta do facto das recomendações de Burrill terem sido assumidas institucionalmente pela American Statistical Association (1994).

Mostrar como mentir com a estatística e salientar paradoxos em probabilidades tem como consequência a destruição da confiança do aluno (Watkins, Burrill, Landwehr & Scheaffer, 1992). Este ponto de vista é também partilhado por Falk e Konold (1992). Referindo-se aos paradoxos em probabilidades, estes autores afirmam:

> "Eles parecem desafiar os estudantes e captar o seu interesse. É tentador trazer para a sala de aula alguns dos problemas mais contra-intuitivos para demonstrar aos estudantes as suas tendências erradas e talvez esclarecê-las. Contudo, se um professor persiste em chamar à atenção dos estudantes para o quão predispostos estão a cometer erros inferenciais, eles podem tornar-se tão convencidos das suas incapacidades ao ponto de jamais acreditarem que alguma vez dominarão técnicas mais apropriadas." (Falk & Konold, 1992, p. 161)

No sentido de evitar a perda de confiança na suas capacidades, Falk e Konold advogam um equilíbrio entre situações que ilustrem concepções erradas e enviesamentos e situações que afirmem a capacidade dos estudantes. As intuições válidas, cuja existência tem sido demonstrada pelos mais variados estudos, constituem para estes autores um bom ponto de partida para o ensino das probabilidades.

Admitindo a consistência entre a posição tradicional e a estratégia das intuições ancoradoras na educação em ciências (Clement, 1987), Lesser (1995) destaca duas limitações da posição tradicional: a possibilidade de não haver boas situações ancoradoras suficientes para realizar o processo de *bridging* e os alunos podem não compreender ou aplicar as analogias da maneira pensada pelo professor. Lesser identifica ainda limitações ao nível de aspectos do modelo de desenvolvimento cognitivo de Piaget e Inhelder (s/d), na medida em que estudantes do ensino superior não atingem o estádio das operações formais, pelo facto de algumas concepções erradas se tornarem mais dominantes com a idade e resistirem ao ensino (Fischbein & Schnarch, 1997; Green, 1983) e pelo facto da posição de Burrill se basear no que acontece na sala de aula e não na investigação formal.

No paradigma alternativo, diferentemente, destacam-se de modo sistemático os exemplos contra-intuitivos. Para Gordon (1991), a exploração destes exemplos, que se podem encontrar em todas as áreas da matemática, incluindo as probabilidades, apresenta várias vantagens: cativa a atenção dos estudantes em virtude do desequilíbrio experienciado, desafia hábitos de pensamento e práticas e constitui uma oportunidade para desenvolver um maior apreço acerca da necessidade de exploração, de reflexão e de raciocínio.

Lesser (1998) manifesta a convicção que o uso inteligente destes exemplos contra-intuitivos em estatística suporta uma pedagogia construtivista, promovendo uma aprendizagem mais profunda a partir das crenças prévias dos alunos e encorajando o papel do professor como facilitador da aprendizagem. Além disso, os alunos poderão beneficiar de oportunidades para desenvolver a motivação, a metacognição, o pensamento crítico, a aprendizagem por descoberta, as conexões com aplicações da vida real e a história. Alguns destes aspectos são também referidos por Falk e Konold (1992). Referindo-se aos exemplos contra-intuitivos, que veiculam falácias e conclusões paradoxais, estes autores afirmam:

> "Alguns destes exemplos desempenharam um papel importante no desenvolvimento da teoria das probabilidades. Os estudantes podem igualmente

> beneficiar em comparar as suas intuições relativas a puzzles e paradoxos com soluções normativas. Esta actividade requer uma consciência dos seus próprios processos de pensamento. O conhecimento acerca do seu próprio pensamento (metacognição) não é menos importante do que a aprendizagem da solução correcta, e o pensamento reflexivo é um passo vital para atingir a capacidade matemática abstracta. Um paradoxo usualmente gera um conflito. Estes conflitos podem encorajar os estudantes a examinarem criticamente as suas teorias intuitivas. Paralelamente ao desenvolvimento histórico da teoria, este exame pode revelar aos estudantes as deficiências na sua compreensão e, portanto, promover o desenvolvimento de conceitos normativos. (Falk & Konold, 1992, p. 157)

Konold (1994) destaca o efeito motivacional dos resultados surpreendentes, afirmando que os "estudantes estão motivados para explorar o problema mais formalmente" (Konold, 1994, p. 233). Além disso, para este autor, os estudantes, quando confrontados com estes resultados surpreendentes, revelam ansiedade em exprimir opiniões nas discussões da sala de aula.

Tal como na posição tradicional, também na posição alternativa Lesser (1995) identifica limitações. Primeiro, uma situação concebida para contrastar um raciocínio normativo com um raciocínio informal pode não produzir qualquer conflito. Segundo, a publicação e divulgação de um conjunto *standard* de exemplos contra-intuitivos com ampla circulação na sala de aula pode, eventualmente, perder a sua eficácia, na medida em que os estudantes podem centrar-se mais nas respostas correctas do que em compreenderem os problemas subjacentes. Finalmente, a profunda compreensão que a exploração de um exemplo contra-intuitivo pode produzir raramente está associada com um curso superior introdutório. Diferentemente, estes exemplos são planeados para estudantes universitários de matemática avançada, para estudantes graduados e para professores. A questão crítica, neste caso, é estar-se seguro de que os estudantes dispõem dos meios adequados para analisar os paradoxos de modo significativo.

Por fim, Lesser (1995), avançando quatro razões, advoga uma síntese dos dois paradigmas como o menor de dois males. A primeira, pode ser observada em investigadores de educação em ciências que recorrem simultaneamente a analogias ancoradoras, consistentes com a posição tradicional, e a estratégias de mudança conceptual, consistentes com a posição alternativa. A segunda, centra-se na recomendação de Burrill (1990). Tal recomendação não deve ser entendida como excluindo totalmente as situações contra-intuitivas, assim como Gordon (1991), provavelmente, não advoga a apresentação exclusiva de situações paradoxais. Terceiro, assim como não há evidência suficiente para afirmar que a eliminação dos exemplos contra-intuitivos conduziria a uma realização mais efectiva em certos objectivos afectivos e cognitivos, também não há evidência de que esses exemplos devam ser usados sempre ou mesmo durante a maior parte do tempo. Finalmente, a opção entre explorar uma situação contra-intuitiva ou uma outra situação deve ser determinada por critérios de adequação.

C A P Í T U L O I I I

METODOLOGIA

3.1. Introdução

Neste capítulo descreve-se a metodologia utilizada em cada um dos dois estudos que constituem a investigação realizada. Para tal, descrevem-se as acções desenvolvidas e os procedimentos utilizados no sentido de responder às questões de investigação formuladas nos estudos.

Neste sentido, são aqui desenvolvidos os seis pontos seguintes: (1) descrição dos dois estudos, em que se especificam as questões de investigação, os alunos que neles participaram e a sua tipologia; (2) amostragem, em que se caracterizam os alunos que participaram nos estudos; (3) variáveis, onde se definem, classificam e codificam as várias variáveis estabelecidas nos estudos; (4) instrumentos: descrição e validação, em que se faz a descrição dos instrumentos usados nos estudos e se descrevem os respectivos processos de validação; (5) recolha de dados, onde se refere a forma como os dados foram obtidos; e (6) análise de dados, em que se mencionam os procedimentos de análise de dados utilizados para dar resposta às questões de investigação.

3.2. Descrição dos estudos

A investigação realizada é constituída por dois estudos. No primeiro estudo, designado por 'Estudo sobre intuições probabilísticas', procurou-se identificar e caracterizar intuições em probabilidades. No segundo estudo, designado por 'Estudo sobre o ensino de probabilidades', implementou-se uma estratégia de ensino em probabilidades.

3.2.1. Estudo sobre intuições probabilísticas

Neste estudo, dirigido à identificação e caracterização de intuições probabilísticas, participaram alunos do 8º e 11º anos de escolaridade e foram estabelecidas as três questões de investigação:

Questão de investigação 1. Que intuições probabilísticas possuem alunos do 8º ano de escolaridade comparativamente com alunos do 11º ano de escolaridade?

Questão de investigação 2. Há diferenças nas respostas correctas em relação às variáveis ano escolar, desempenho em matemática, sexo, ensino de probabilidades e interpretação do conceito de probabilidade, entre alunos do 8º ano e/ou do 11º ano de escolaridade?

Questão de investigação 3. Há diferenças na confiança nas respostas, em relação às variáveis ano escolar, desempenho em matemática, sexo e ensino de probabilidades, entre alunos do 8º ano e/ou do 11º ano de escolaridade?

Os dados utilizados neste estudo foram obtidos através de dois questionários envolvendo as mesmas situações probabilísticas, diferindo apenas na formulação das questões. Especificamente, no questionário-conceito clássico a introdução de cada questão focava o conceito clássico de probabilidade e no questionário-conceito frequencista focava o conceito frequencista de probabilidade. Ainda, em relação aos dois questionários, o que focava o conceito clássico foi aplicado a alunos do 8º e 11º anos de escolaridade, enquanto o que focava o conceito frequencista foi aplicado apenas a alunos do 8º ano.

Globalmente, na medida em que este estudo pretende descrever um fenómeno em si mesmo, ele pode inserir-se na categoria de estudos descritivos. Neste contexto, a informação recolhida de entidades já existentes foi obtida em ambiente de sala de aula e constituiu em si mesma a resposta às questões de investigação colocadas. Mais concretamente, considerando a classificação dos estudos descritivos de Fox (1987), o estudo assume aspectos de uma investigação de aproximação descritiva transversal e de uma investigação comparativa. No caso da aproximação descritiva transversal, descreve-se um conjunto de fenómenos num determinado momento envolvendo sujeitos de diferentes grupos etários ou de diferentes níveis de desenvolvimento (Fox, 1987; Gall, Borg & Gall, 1996). Na investigação comparativa, partindo-se de pelo menos duas entidades existentes, estabelece-se um método formal para obter dados que constituem o critério de base para comparar as entidades e chegar a algumas conclusões acerca de qual é a melhor (Fox, 1987).

3.2.2. Estudo sobre o ensino de probabilidades

Neste estudo, dirigido à definição e avaliação de uma experiência de ensino para o tema de 'Estatística e probabilidades' do 9º ano de escolaridade, participaram alunos do 9º ano de escolaridade e foi estabelecida a seguinte questão de investigação:

Questão de investigação 4. No 9º ano de escolaridade, um tipo de ensino que considere as ideias intuitivas dos alunos tem um maior impacto na aprendizagem de probabilidades, comparativamente com um ensino tradicional, no que respeita às intuições, às respostas correctas e ao cálculo de probabilidades?

Neste estudo estiveram envolvidos dois grupos de sujeitos – o grupo de controlo e o grupo experimental – que foram avaliados em dois momentos distintos – o pré-teste e o pós-teste. Tanto o grupo experimental como o grupo de controlo foram submetidos a um tratamento. No caso do grupo experimental, o tratamento consistiu numa experiência de ensino de probabilidades que explorasse as intuições probabilísticas dos alunos; no caso do grupo de controlo, o tratamento consistiu numa experiência de ensino tradicional sobre o mesmo tema. Na taxonomia de classificação dos estudos de investigação de Gall, Borg e Gall (1996), trata-se de um estudo do tipo quase-experimental, pois não se adoptou um procedimento aleatório na selecção dos sujeitos nem na sua atribuição aos grupos de controlo e experimental.

A experiência de ensino implementada no estudo incidiu sobre o tema 'Estatística e probabilidades' do programa de Matemática do 9º ano de escolaridade. Em relação aos alunos do 9º ano de escolaridade que participaram no estudo, os do grupo experimental foram ensinados pelo autor do estudo e os do grupo de controlo foram ensinados pelos seus professores de Matemática. Em termos de turmas, o autor do estudo ensinou nas quatro turmas do grupo experimental e os dois professores de Matemática das respectivas turmas ensinaram nas quatro turmas do grupo de controlo. Em relação ao grupo de controlo, um professor ensinou em três turmas e o outro professor ensinou numa turma. Estes dois professores eram detentores de uma Licenciatura em Ensino de Matemática, pertenciam ao quadro de nomeação definitiva da escola e leccionavam há mais de cinco anos e menos de 10 anos.

A experiência de ensino prolongou-se por um período de 14 aulas, cada uma com a duração de 50 minutos, tanto no grupo experimental como no grupo de controlo. Em termos de calendarização, a experiência de ensino decorreu no ano lectivo de 1997/98, tendo-se iniciado nos primeiros dias do mês de Janeiro e terminado nos primeiros dias do mês de Fevereiro em ambos os grupos.

A. Metodologia de ensino do grupo experimental

O tema estudado estruturou-se em três subtemas com o seguinte número de aulas: (1) 'Termos e conceitos probabilísticos', 4 aulas; (2) 'Probabilidade em experiências simples', 5 aulas; e (3) 'Probabilidade em experiências compostas', 5 aulas. No Anexo III está descrita a planificação detalhada do tema tratado na experiência.

A estratégia de ensino alicerçou-se em diferentes perspectivas do conceito de probabilidade, na utilização de objectos aleatórios concretos, na exploração de analogias, em representações facilitadoras da contagem, na organização de sistemas de tarefas, em aspectos lógicos e no desenvolvimento de uma interacção intensa dos alunos entre si e entre os alunos e o professor.

Com o objectivo de os alunos compreenderem o carácter multifacetado do conceito de probabilidade, exploraram-se as perspectivas clássica, frequencista e subjectivista. A abordagem da perspectiva subjectivista constituiu tão-somente uma oportunidade de os alunos verbalizarem as suas intuições probabilísticas (Hawkins & Kapadia, 1984), e não representou qualquer esforço no sentido de compreender qualquer formalização do conceito subjectivista (Borovcnik, Bentz & Kapadia, 1991). No que respeita aos conteúdos, quer a distinção entre acontecimentos certos e quase certos e entre acontecimentos impossíveis e quase impossíveis, quer a comparação de probabilidades em experiências simples e a comparação de probabilidades em experiências compostas constituíram momentos privilegiados de exploração de intuições.

Na abordagem dos conteúdos recorreu-se à observação de objectos aleatórios concretos e à experimentação com esses objectos. Concretamente, utilizaram-se moedas, dados, sacos com bolas de diferentes cores, baralhos de cartas e *punaises* com o intuito de familiarizar os alunos com tais objectos e, talvez mais importante, de desenvolver a apreciação de regularidades e simetrias existentes nesses objectos. Foi tido em conta que estas características dos objectos se tornam aspectos importantes aquando do estabelecimento de probabilidades *a priori* (Borovcnik & Peard, 1996). Por outro lado, pensou-se que com a experimentação se destaca a estabilidade das frequências relativas, enquanto meio de estabelecer relações com o conceito clássico e enquanto único meio de atribuir probabilidades em experiências em que os acontecimentos não são equiprováveis. Especificamente, no que respeita às experiências compostas, as frequências relativas foram exploradas para definir acontecimentos, para estabelecer o espaço amostral e para calcular probabilidades pela lei de Laplace.

No sentido de avaliar a influência do número de experiências sobre a estabilidade das frequências relativas, consideraram-se dados obtidos por um único par de alunos, por vários pares de alunos e pelo grupo turma. A reunião dos dados obtidos por vários pares da turma constituiu uma estratégia para obter rapidamente conjuntos numerosos de dados.

A exploração de analogias (Clement, 1987), na perspectiva da formulação de exemplos extremos (Fast, 1997), foi outro aspecto considerado no ensino do tema, especialmente na distinção, quer entre acontecimentos certos e quase certos, quer entre acontecimentos impossíveis e quase impossíveis, bem como aquando da comparação de probabilidades em experiências simples no contexto de urnas. No primeiro caso, a manipulação do número de experiências constitui uma forma de refinar a distinção entre os acontecimentos e, no segundo caso, acrescentando sistematicamente a mesma quantidade de bolas das duas cores, salienta-se a ineficácia de raciocínios aditivos para determinar certas probabilidades.

No cálculo de probabilidades em experiências compostas, recorreu-se a diagramas de árvore e a tabelas de dupla entrada, enquanto representações facilitadoras da contagem do número de casos possíveis e do número de casos favoráveis. Em alternativa, o cálculo destas probabilidades baseou-se também na independência dos acontecimentos (*e. g.*, a extracção com reposição de bolas de um saco) e na ideia de probabilidade condicionada (*e. g.*, extracção sem reposição de bolas de um saco). Ainda neste tema, estabeleceram-se sistemas de tarefas (Steinbring, 1991), que resultam de agrupar tarefas relacionadas com um objecto comum e análogas entre si.

A inclusão de aspectos lógicos em alguns conteúdos de probabilidades revela o seu interesse não só no tema tratado, mas também em relação à aprendizagem da matemática em geral e no desenvolvimento da compreensão de *skills* de comunicação. Exploraram-se tarefas incluindo os conectivos *não*, *e* e *ou*, especialmente, nos subtemas 'Termos e conceitos probabilísticos' e 'Probabilidade em experiências simples'.

Finalmente, teve-se em conta que a questão da interacção poderá ser a mais crítica e a mais importante na promoção de um ensino que considere as intuições dos alunos. Procurando-se tornar a interacção estimuladora, crítica e eficiente, estabeleceram-se três momentos fundamentais na interacção na sala de aula (Konold, 1991). Primeiro, os alunos trabalharam em pares e começaram por abordar as questões ou problemas propostos individualmente e discutiram as suas ideias com o seu colega de carteira. Seguidamente, discutiram-se no grupo turma, incluindo o professor, as conclusões obtidas no momento anterior. Finalmente, quando necessário, o professor sugeriu contradições existentes nas respostas ou raciocínios dos alunos e propôs a obtenção de evidência empírica. Em todo o processo de interacção o professor formulou questões, respondeu a questões dos alunos com outras questões, eventualmente mais focalizadas, e evitou de todo apresentar as respostas às questões levantadas por si ou pelos alunos (Saughnessy, 1977).

B. Metodologia de ensino do grupo de controlo

O autor do estudo começou por se reunir com os dois professores responsáveis pelo ensino nas quatro turmas do grupo de controlo, explicando-lhes os objectivos do estudo e destacando a importância de eles manterem a sua metodologia de ensino, independentemente da nova metodologia que ia ser testada no grupo experimental.

Neste caso, os dois professores envolvidos leccionaram o tema seguindo o manual escolar adoptado na escola (Neves & Luísa, 1997). De forma sucinta no manual escolar, no que respeita ao tema 'Estatística e probabilidades', identificam-se três subtemas: (1) 'Experiências aleatórias. Acontecimentos em probabilidades', (2) 'Lei de Laplace. Determinação da probabilidade de um acontecimento' e (3) 'Frequência relativa e probabilidade'. No primeiro subtema são distinguidas experiências aleatórias de experiências deterministas e são definidos, em linguagem de conjuntos, espaço amostral, acontecimentos elementares e compostos e acontecimentos certos e impossíveis.

No segundo subtema é tratado o conceito clássico de probabilidade, sendo apresentada a definição de probabilidade de Laplace e enunciadas consequências dessa definição. Em particular, num contexto de uma caixa de bombons, conclui-se que a probabilidade de um acontecimento impossível é 0, a probabilidade de um acontecimento certo é 1 e a probabilidade de um acontecimento qualquer é um valor compreendido entre 0 e 1 (inclusive).

Ainda no segundo subtema, são apresentados exemplos de cálculo de probabilidades de acontecimentos em experiências compostas, com recurso a diagramas de árvore e a tabelas de dupla entrada, enquanto meios facilitadores de contagem do número de casos possíveis e do número de casos favoráveis. É ainda exemplificado, recorrendo a um diagrama, o cálculo de probabilidades em experiências compostas através da multiplicação das probabilidades das experiências simples, não sendo feita referência explícita à independência ou dependência dos acontecimentos.

No terceiro subtema é introduzida a noção de frequência relativa como valor aproximado da probabilidade teórica e enunciada a lei dos grandes números. Além disso, é utilizada a frequência relativa para atribuir probabilidades em experiências cujos resultados não são equiprováveis e para verificar se um dado objecto aleatório é ou não viciado.

A verificação de que os professores seguiram o manual escolar adoptado na escola foi feita através dos registos dos cadernos diários de alguns alunos em cada uma das quatro turmas envolvidas, tendo-se constatado que os dois professores seguiram o manual escolar em todas as suas turmas do grupo de controlo.

O manual escolar apresenta um considerável número de situações probabilísticas que envolvem objectos aleatórios comuns, tais como moedas, dados, urnas com bolas de diferentes cores, baralhos de cartas, *punaises*, etc. Contudo, diferentemente do grupo experimental, neste caso os alunos do grupo de controlo não tiveram contacto directo com esses objectos aleatórios concretos na sala de aula.

3.3. Amostragem

Nesta secção descrevem-se as amostras de alunos que participaram em cada um dos estudos, considerando o tipo de escola, o ano escolar, o sexo e o número de alunos das respectivas turmas que faltaram aquando da passagem dos instrumentos.

3.3.1. Estudo sobre intuições probabilísticas

Na Tabela 1 está registado o número de alunos por interpretação do conceito de probabilidade (clássico e frequencista), por ano escolar, por turma e por sexo, assim como o número de alunos que faltaram aquando da passagem dos instrumentos.

Tabela 1. Distribuição dos alunos da amostra por interpretação do conceito de probabilidade, ano escolar, escola, turma e sexo no 'Estudo sobre intuições probabilísticas'.

Conceito de probabilidade	Ano	Escola	Turma	Nº de alunos por sexo			Nº de alunos que faltaram
				Feminino	Masculino	Total	
Clássico	8º ano	Secundária 1	Turma 1	12	17	29	0
			Turma 2	9	18	27	2
			Turma 3	9	15	24	1
			Turma 4	10	19	29	0
		Secundária 2	Turma 5	17	12	29	3
		Básica 2,3 1	Turma 6	11	9	20	1
			Turma 7	17	6	23	2
		Colégio 1	Turma 8	16	7	23	1
			Total	101	103	204	10
	11º ano	Secundária 1	Turma 1	4	17	21	0
			Turma 2	12	17	29	3
			Turma 3	19	11	30	0
			Turma 4	12	11	23	1
			Turma 5	3	10	13	1
			Turma 6	6	9	15	4
			Turma 7	13	12	25	3
			Turma 8	19	9	28	3
		Secundária 3	Turma 9	20	5	25	4
			Total	108	101	209	19
Frequencista	8º ano	Colégio 1	Turma 1	14	14	28	0
		Secundária 4	Turma 2	7	15	22	1
		Colégio 2	Turma 3	7	14	21	3
			Turma 4	9	15	24	0
			Turma 5	11	11	22	0
		Básica 2,3 2	Turma 6	18	9	27	0
			Turma 7	17	9	26	1
			Turma 8	19	9	28	0
			Total	102	96	198	5

Neste estudo participaram alunos do 8º e 11º anos que frequentavam, no ano lectivo de 1996/97, escolas da cidade de Braga. Os alunos foram seleccionados por turmas, considerando um número de sujeitos equilibrado em relação às variáveis sexo e desempenho em matemática. Neste sentido, condicionou-se a escolha das turmas, na sua globalidade, à obtenção de uma amostra com sensivelmente o mesmo número de sujeitos de ambos os sexos e de modo a incluir um número significativo de sujeitos nas diferentes realizações escolares em matemática, nomeadamente, alunos com baixo desempenho, alunos com desempenho médio e alunos com desempenho elevado em matemática. Para caracterização da realização escolar em matemática, nesta fase de selecção das turmas, consideraram-se as opiniões dos professores de matemática das respectivas turmas.

Relativamente ao conceito clássico de probabilidade, participaram no estudo alunos do 8º e 11º anos de escolaridade. Os alunos do 8º ano, num total de 204, distribuíram-se por oito turmas de quatro escolas. A escolha de um maior ou menor número de turmas em cada escola deveu-se ao facto de na respectiva escola existirem mais ou menos turmas do 8º ano. Os alunos do 11º ano, num total de 209, distribuíram-se por nove turmas de duas escolas. Todos estes alunos frequentavam cursos de áreas científicas – Agrupamento 1 e Agrupamento 2 –, pelo que a disciplina de Matemática fazia parte dos currículos dos seus cursos. Neste caso, verificou-se que todos os alunos, à excepção de uma turma, pertenciam à mesma escola secundária. Este facto justificou-se na medida em que nesta escola havia alunos que não tinham estudado o tema de ‘Estatística e probabilidades’ no 9º ano de escolaridade, conforme está previsto no programa oficial da disciplina de Matemática do 3º ciclo do ensino básico. Ainda no caso da turma da outra escola secundária, verificou-se a existência de muitos alunos que também não tinham estudado esse tema, o que resultou do facto de muitos alunos, na sua maioria, terem sido transferidos da primeira escola secundária depois de terem terminado o 9º ano de escolaridade.

Muito embora a selecção dos sujeitos centrada numa única escola possa diminuir o poder preditivo da amostra, tal permitiu incluir no estudo a variável ensino de probabilidades, no que respeita aos alunos do 11º ano de escolaridade.

O conceito frequencista de probabilidade foi avaliado apenas em alunos do 8º ano de escolaridade. Neste caso, participaram 198 alunos, distribuídos por oito turmas de quatro escolas.

3.3.2. Estudo sobre o ensino de probabilidades

Na Tabela 2 está registado o número de alunos por grupo (controlo e experimental), por turma e por sexo, assim como o número de alunos que faltaram aquando da passagem dos instrumentos.

Tabela 2. Distribuição dos alunos da amostra por grupo experimental e de controlo, turma e sexo no 'Estudo sobre o ensino de probabilidades'.

Grupo	Turma	Nº de alunos por sexo			Nº alunos que faltaram	
		Feminino	Masculino	Total	Pré-teste	Pós-teste
Experimental	Turma 1	16	10	26	1	0
	Turma 2	23	7	30	0	3
	Turma 3	18	12	30	1	1
	Turma 4	3	12	15	2	1
	Total	60	40	101	4	5
Controlo	Turma 1	18	11	29	0	2
	Turma 2	19	11	30	0	1
	Turma 3	6	14	20	0	1
	Turma 4	15	14	29	1	2
	Total	58	50	108	1	6

Neste estudo participaram apenas alunos do 9º ano de escolaridade que frequentavam no ano lectivo de 1997/98 uma escola básica 2, 3 da cidade de Braga.

Tal como no estudo anterior, os sujeitos foram seleccionados por turmas, procurando-se obter um número de sujeitos o mais equilibrado possível relativamente às variáveis sexo e desempenho em matemática. No caso desta última variável, as turmas foram seleccionadas na base de uma apreciação global fornecida pelo professor de matemática da respectiva turma.

Ao todo, participaram no estudo oito turmas do 9º ano de escolaridade, das quais quatro integraram o grupo experimental e as restantes quatro constituíram o grupo de controlo.

Deve referir-se, ainda, que na escola a que os alunos pertenciam existiam mais três turmas do 9º ano de escolaridade. Todavia, estas três turmas não reuniam as condições exigidas para participarem no estudo. Em duas delas, a professora era estudante trabalhadora, o que, de acordo com esse estatuto, lhe permitia faltar mais vezes. Em consequência, podiam resultar daí, como veio a verificar-se, desfasamentos de tempo na leccionação do tema, o que poderia produzir efeitos indesejáveis na realização do estudo.

3.4. Variáveis

No conjunto dos dois estudos estabeleceram-se várias variáveis independentes e dependentes. Incluíram-se na categoria das variáveis independentes as variáveis: ano escolar, desempenho em matemática, ensino de probabilidades, idade, interpretação do conceito probabilístico, metodologia de ensino e sexo. Na categoria das variáves dependentes incluíram-se as variáveis: raciocínio, resposta, confiança e cálculo de probabilidades.

Seguidamente, para cada uma das variáveis, indica-se, quer o estudo ou estudos a que se refere, quer o processo de codificação (quando for pertinente) e os valores que assumiu.

<u>Ano escolar</u>. Esta variável foi considerada apenas no 'Estudo sobre intuições probabilísticas', tendo tomado os valores: 8º ano e 11º ano. Recorde-se que no 'Estudo sobre o ensino de probabilidades' apenas participaram alunos do 9º ano de escolaridade.

<u>Cálculo de probabilidades</u>. Depois de implementado o ensino do tema 'Estatística e probabilidades', do 9º ano de escolaridade, todos os alunos que participaram no estudo foram submetidos a uma ficha de avaliação sobre cálculo de probabilidades com o

propósito de atribuir uma classificação a cada um dos alunos, para dar resposta a finalidades da avaliação no sistema de ensino.

Considerando que a classificação foi estabelecida em percentagem, esta variável poderia tomar valores de 0% a 100%.

Confiança. É pertinente destacar, desde já, que as três primeiras questões eram formadas por cinco alíneas cada uma, tendo o aluno afirmado uma confiança média no conjunto dessas cinco alíneas e não em cada uma delas individualmente. A opção de não incluir a confiança individual em cada uma das 15 alíneas das três primeiras questões deveu-se à necessidade de ajustar o questionário ao tempo disponível para lhe responder.

Consequentemente, esta variável quantificou a confiança com que os alunos responderam ao conjunto das últimas 11 questões do questionário-conceito clássico usado no 'Estudo sobre intuições probabilísticas'. Neste questionário, a última parte de cada questão consistia numa escala tipo-Likert com cinco pontos, em que o aluno assinalava um dos cinco níveis de confiança possíveis: 'nada confiante', 'pouco confiante', 'confiante', 'muito confiante' e 'totalmente confiante'.

Cada um dos níveis de confiança da escala foi codificado através de um número inteiro de 1 a 5, correspondendo a um maior número uma maior confiança. Seguidamente, determinou-se, para cada aluno, a média das confianças depositadas nas respostas em todas as questões a que respondeu, obtendo-se, deste modo, o valor da confiança com que cada aluno respondeu às 11 questões.

Além da confiança na totalidade do questionário, considerou-se também a confiança no conjunto das respostas correctas e no conjunto das respostas não correctas. Para tal, determinou-se, para cada aluno, a média das confianças depositadas nas respostas correctas e determinou-se igualmente a média das confianças depositadas nas respostas não correctas. Neste caso, consideraram-se, igualmente, as 11 últimas questões do questionário, até porque para as três primeiras não era possível distinguir directamente a confiança nas respostas correctas da confiança nas respostas erradas.

Desempenho em matemática. Esta variável, usada em ambos os estudos, classificou a competência matemática dos sujeitos com base nas suas classificações escolares na disciplina de Matemática, tendo tomado os valores baixo, médio e elevado, os quais foram estabelecidos tendo por referência critérios habituais na escola e que se passam a descrever.

No caso do 'Estudo sobre intuições probabilísticas', distingue-se a codificação da variável nos alunos do 8º ano relativamente aos alunos do 11º ano. Para os alunos do 8º ano consideraram-se as classificações em Matemática no final do 7º ano e no primeiro e no segundo períodos do 8º ano. Depois de adicionadas estas classificações para cada um dos alunos, usou-se o seguinte critério: fez-se corresponder o desempenho baixo a uma soma inferior a 8, o desempenho médio a uma soma igual ou superior a 8 e inferior a 11 e, finalmente, o desempenho elevado a uma soma igual ou superior a 11. Recorde-se que cada uma das classificações obtidas por estes alunos varia de 1 a 5.

Para os alunos do 11º ano consideraram-se as classificações em Matemática no final do 10º ano e no primeiro período do 11º ano. Depois de adicionadas estas classificações para cada um dos alunos, utilizou-se o seguinte critério: fez-se corresponder o desempenho baixo a uma soma inferior a 20, o desempenho médio a uma soma igual ou superior a 20 e inferior a 28 e, por fim, o desempenho elevado a uma soma igual ou superior a 28. Recorde-se que cada uma das classificações obtidas por estes alunos é um valor inteiro do intervalo [0, 20].

No caso do 'Estudo sobre o ensino de probabilidades', participaram apenas alunos do 9º ano de escolaridade, para os quais as classificações consistiam num nível de 1 a 5. Para estes alunos consideraram-se as classificações em Matemática no final do 8º ano e no primeiro período do 9º ano. Uma vez adicionadas estas classificações para cada um dos alunos, adoptou-se o seguinte critério: fez-se corresponder o desempenho baixo a uma soma inferior a 6, o desempenho médio a uma soma igual ou superior a 6 e inferior a 8 e, por último, o desempenho elevado a uma soma igual ou superior a 8.

Ensino de probabilidades. Esta variável foi considerada apenas no 'Estudo sobre intuições probabilísticas' e em relação aos alunos do 11º ano, classificando estes sujeitos em dois grupos em função do ensino de probabilidades. Assim, a variável tomou dois valores: alunos com ensino de probabilidades (*cep*) e alunos sem ensino de probabilidades (*sep*).

Face aos programas escolares, nenhum aluno do 8º ano tinha estudado probabilidades na escola.

Idade. Esta variável tomou os valores das idades, em número inteiro de anos, dos alunos que participaram nos dois estudos. Verificou-se que no 'Estudo sobre intuições probabilísticas', as idades dos alunos do 8º ano variaram de 12 a 17 anos e as idades dos alunos do 11º ano variaram de 15 a 20 anos. No 'Estudo sobre o ensino de probabilidades', as idades dos alunos, todos do 9º ano, variaram de 14 a 18 anos.

Interpretação do conceito de probabilidade. Esta variável classificou os alunos consoante responderam ao questionário-conceito clássico ou ao questionário-conceito frequencista. Assim, esta variável, avaliada apenas no 'Estudo sobre intuições probabilísticas' e em relação aos alunos do 8º ano, tomou dois valores: conceito clássico e conceito frequencista.

Metodologia de ensino. Esta variável foi considerada apenas no 'Estudo sobre o ensino de probabilidades' e classificou os alunos em dois grupos, consoante a metodologia de ensino a que foram submetidos no tema 'Estatística e probabilidades' do 9º ano de escolaridade. Especificamente, a variável tomou dois valores: metodologia tradicional e metodologia experimental, correspondentes aos grupos de controlo e experimental, respectivamente.

Raciocínio. Esta variável classificou os raciocínios apresentados pelos alunos para justificarem as respostas escolhidas na parte de escolha múltipla das respectivas perguntas, no questionário-conceito clássico e no questionário-experiência de ensino. A consideração desta variável permitiu tipificar, nas várias perguntas dos questionários, os raciocínios em que os alunos basearam as suas respostas.

No caso do questionário-conceito clássico, com 14 questões, foi incluída a parte do raciocínio apenas nas últimas 11 questões. Assim, ficaram excluídas as três primeiras questões, que ao todo totalizavam 15 alíneas. As razões desta opção, tal como no caso da confiança, prenderam-se com constrangimentos de tempo para responder ao questionário. No caso do questionário-experiência de ensino, foi incluída a parte do raciocínio em todas as 5 questões, cada uma com três alíneas.

Para cada uma das perguntas consideradas dos questionários referidos, os valores desta variável foram determinados a partir da análise dos raciocínios apresentados pelos sujeitos nessa pergunta. Assim, numa dada pergunta, a variável raciocínio tomou diferentes valores correspondentes às diferentes categorias estabelecidas a partir dos raciocínios exibidos pelos alunos nessa pergunta.

Os valores desta variável não se apresentam aqui, pois os seus valores foram definidos aquando da análise dos dados. Consequentemente, eles são referidos no capítulo ‘Resultados’.

Resposta. A variável resposta foi usada nos dois estudos e tomou por valores as alternativas de resposta estabelecidas nos itens de escolha múltipla, que constituíam a primeira parte das perguntas dos questionários. A primeira parte de cada uma das 26 perguntas do questionário-conceito clássico e do questionário-conceito frequencista e de cada uma das 15 perguntas do questionário-experiência de ensino constava de um item de escolha múltipla com três ou quatro alternativas de resposta. As três ou quatro alternativas de resposta possíveis constituem, então, os valores da variável resposta, os quais variam ao longo das diferentes perguntas dos questionários.

Com o fim de estabelecer comparações entre variáveis nas perguntas individualmente ou em conjuntos de perguntas, distinguiu-se a resposta correcta, correspondente à alternativa correcta, da resposta não correcta, correspondente às duas ou três alternativas não correctas. Para efectuar tais comparações considerou-se o número de respostas correctas numa pergunta ou em conjuntos de perguntas, incluindo o conjunto de todas as perguntas do questionário.

Sexo. Esta variável tomou dois valores: masculino e feminino, e foi considerada nos dois estudos.

3.5. Instrumentos: descrição e validação

Em geral, verifica-se através da literatura, que os estudos sobre intuições são realizados recorrendo a questionários, testes ou entrevistas. Muito embora as entrevistas permitam obter uma informação mais profunda e clarificar afirmações vagas, é difícil estandardizar a situação de entrevista de modo a que o entrevistador não influencie a resposta do sujeito (Gall, Borg & Gall, 1996). Destacando-se a dicotomia pensamento intuitivo *versus* pensamento analítico, Kuhl (citado em Scholz, 1987) defende que a exigência de pensar em voz alta induz uma mudança no sentido do pensamento analítico.

No entanto, a utilização de instrumentos de papel e lápis permite, comparativamente com as entrevistas, estudar um maior número de sujeitos com menores custos, menos tempo e menor esforço e, consequentemente, facilita a generalização dos resultados obtidos a grupos de sujeitos mais numerosos (Amir, Frankl & Tamir, 1987; Gall, Borg & Gall, 1996).

No conjunto dos dois estudos foram usados três questionários e quatro versões diferentes de uma ficha de avaliação da aprendizagem dos alunos no tema 'Estatística e probabilidades' do 9º ano de escolaridade.

No caso dos questionários, foi pedido aos sujeitos que justificassem as escolhas feitas nos itens de escolha múltipla. Num estudo realizado na área de ciências, Amir, Frankl e

Tamir (1987) concluíram que as justificações das respostas em itens de escolha múltipla se revelaram meios eficazes para identificar e compreender concepções erradas e para clarificar a compreensão dos alunos que seleccionaram a resposta correcta. Neste último caso, de entre os alunos que escolheram a resposta correcta, um número considerável não apresentou justificações adequadas às respostas escolhidas.

3.5.1. Descrição dos instrumentos

A descrição dos instrumentos vai ser feita a partir do estudo em que foram usados, considerando ainda a forma das questões e o conteúdo que pretendiam avaliar. Sempre que alguma questão tiver sido estudada por outros autores, esse facto será também mencionado.

A. Estudo sobre intuições probabilísticas

Neste estudo foram usados dois questionários: o questionário-conceito clássico, em que a formulação das questões destacava o conceito clássico de probabilidade ou probabilidade *a priori*, e o questionário-conceito frequencista, em que a formulação das questões destacava o conceito frequencista de probabilidade ou probabilidade *a posteriori*.

<u>Questionário-conceito clássico</u>. Neste questionário distinguem-se duas partes: a primeira parte destinada a obter dados pessoais e a segunda parte era formada pelas várias questões propriamente ditas (Anexo I). Quanto aos dados pessoais, deve destacar-se que no caso dos alunos do 11º ano perguntava-se se alguma vez tinham estudado probabilidades, o que não aconteceu com os sujeitos do 8º ano. A este propósito, deve lembrar-se que os alunos estudam pela primeira vez probabilidades na escola no 9º ano de escolaridade. O questionário era constituído por 14 questões, das quais as três primeiras ainda se dividiam em cinco alíneas.

No quadro 1 apresenta-se de forma resumida o tema, o tipo de experiência aleatória envolvida e o contexto de cada uma das perguntas do questionário-conceito clássico.

Quadro 1. Classificação das questões do questionário-conceito clássico segundo o tema, o tipo de experiência aleatória e o contexto.

Questões	Tema		Experiência		Contexto		
	Tipo de acont.	Probabilidade	Simples	Composta	Urnas	Dados	Moedas
1.a), 1.b), 1.c), 1.d), 1.e)	×		×		×		
2.a), 2.b), 2.c), 2.d), 2.e)	×		×			×	
3.a), 3.b), 3.c), 3.d), 3.e)	×			×	×		
4, 5, 6, 7		×	×		×		
8, 9		×	×			×	
10		×		×	×		
11, 12		×		×		×	
13, 14		×		×			×

Quanto à forma das questões, ela não se manteve constante ao longo de todo o questionário. As questões 1, 2 e 3 constavam de duas partes distintas. A primeira parte era formada por cinco alíneas, cada uma das quais consistia num item de escolha múltipla com três alternativas de resposta. A segunda parte consistia numa escala de tipo-Likert com cinco pontos, em que o aluno assinalava a confiança média com que tinha respondido ao conjunto das cinco alíneas, desde 'nada confiante' até 'totalmente confiante'. As restantes questões, desde a 4 até à 14 (inclusive), constavam de três partes distintas. Tal como no caso das três primeiras questões, a primeira parte consistia num item de escolha múltipla com três alternativas de resposta. A segunda parte, incluída apenas nestas questões, destinava-se a permitir ao aluno descrever o raciocínio em que tinha baseado a escolha da resposta no item de escolha múltipla. Finalmente, de forma análoga às três primeiras questões, a terceira parte consistia numa escala de tipo-Likert com os mesmos cinco pontos. Neste caso, tratava-se de assinalar a confiança com que o sujeito tinha respondido à questão, que variava igualmente desde 'nada confiante' até 'totalmente confiante'.

As 14 questões classificam-se em três categorias de conteúdo. As questões 1, 2 e 3 referem-se à classificação de acontecimentos em certos, possíveis e impossíveis. Destas, as questões 1 e 2 tratam de experiências simples, a questão 1 no contexto de urnas e a questão 2 no contexto de dados. A questão 3 trata de uma experiência composta no contexto de urnas. Deve notar-se que as categorias 'certo' e 'possível' não são mutuamente exclusivas, pois um acontecimento certo também é possível. Todavia, optou-se por esta solução, pois na fase de pilotagem do questionário observou-se que os alunos as consideraram como categorias disjuntas e, por outro lado, esta terminologia foi usada em outros estudos (Fischbein, Nello & Marino, 1991). Além disso, a distinção deste fino detalhe, considerando, por exemplo, a categoria 'possível mas não certo', dificultaria consideravelmente a sua compreensão, particularmente entre os alunos mais novos.

As questões 4, 5, 6, 7, 8 e 9 referem-se à probabilidade em experiências simples, das quais as questões 4, 5, 6 e 7 se inserem num contexto de urnas e as questões 8 e 9 se inserem num contexto de dados. Questões com este formato, em que se comparam as probabilidades de extrair uma bola de uma certa cor de duas urnas, foram estudadas por Green (1982).

Finalmente, as questões 10, 11, 12, 13 e 14 referem-se à probabilidade em experiências compostas, das quais a questão 10 se insere num contexto de urnas, as questões 11 e 12 num contexto de dados e as questões 13 e 14 num contexto de moedas. Questões do tipo 11, 12, 13 e 14 foram estudadas por Fischbein, Nello e Marino (1991) e a questão 11 foi também estudada por Lecoutre e Durant (1988).

Na apresentação do questionário ordenaram-se as questões considerando os temas tipo de acontecimento e probabilidade e o contexto, por esta ordem. Assim, as questões foram apresentadas pela seguinte ordem: 1, 3, 2, 4, 5, 6, 7, 10, 8, 9, 11, 12, 13 e 14. A ordenação das questões segundo o contexto, dentro de cada um dos dois temas, foi estabelecida pensando no menor esforço intelectual que o aluno teria de despender em responder ao questionário.

Questionário-conceito frequencista. Este questionário era em tudo semelhante ao questionário-conceito clássico, excepto em relação à formulação das questões, em que se destacava o conceito frequencista de probabilidade ou probabilidade *a posteriori* (Anexo I).

Na formulação frequencista, relativamente à formulação clássica, salienta-se no enunciado de cada questão a substituição de uma única experiência pela repetição da experiência um grande número de vezes. Também na parte das questões correspondente ao item de escolha múltipla se destacam alterações. No caso das três primeiras questões, relativas à classificação de acontecimentos, substituíram-se as categorias 'certo', 'possível' e 'impossível' por 'sempre', 'algumas vezes' e 'nunca', respectivamente. Quanto às restantes questões, substituiu-se a expressão 'mais provável' por 'mais vezes'.

Na apresentação do questionário, as questões foram ordenadas na mesma sequência do questionário-conceito clássico.

B. Estudo sobre o ensino de probabilidades

Neste estudo foram usados um questionário e uma ficha de avaliação da aprendizagem dos alunos no tema do estudo, esta última em quatro versões semelhantes.

Questionário-experiência de ensino. Este questionário foi usado no pré-teste e no pós-teste do 'Estudo sobre o ensino de probabilidades'. Tal como os dois questionários anteriores, este também contemplava duas partes: uma dirigida à obtenção de dados pessoais dos sujeitos e outra constituída pelas questões propriamente ditas (Anexo I). O questionário era formado por cinco questões, cada uma das quais com três alíneas.

No que respeita à forma, distinguiam-se em todas as alíneas duas partes. A primeira parte consistia num item de escolha múltipla com quatro alternativas de resposta, no caso das três alíneas da questão 1, e com três alternativas de resposta, no caso das alíneas de todas as outras questões. Na segunda parte de cada alínea pretendia-se que o sujeito descrevesse o raciocínio em que tinha baseado a resposta que seleccionara no item de escolha múltipla. Assim, comparativamente com os dois questionários do primeiro estudo, as várias alíneas do questionário não contemplavam a parte relativa à confiança depositada na resposta dada.

Quanto ao conteúdo e ao contexto contemplado nas várias questões, deve referir-se que as três alíneas de cada uma das cinco questões se inseriam no mesmo contexto e no mesmo conteúdo.

A questão 1 insere-se no contexto de moedas e refere-se à distinção entre acontecimentos certos e muito prováveis e entre acontecimentos impossíveis e pouco prováveis; a questão 2 insere-se no contexto de urnas e refere-se à probabilidade em experiências simples; a questão 3 insere-se no contexto de roletas e refere-se à probabilidade em experiências simples envolvendo aspectos lógicos; a questão 4 insere-se no contexto de urnas e refere-se à probabilidade em experiências compostas e, finalmente, a questão 5 insere-se no contexto de dados e refere-se à probabilidade em experiências compostas.

No quadro 2 apresenta-se resumidamente a caracterização das perguntas do questionário a partir do tema, do tipo de experiência aleatória e do contexto.

Quadro 2. Classificação das questões do questionário-experiência de ensino segundo o tema, o tipo de experiência aleatória e o contexto.

Questões	Tema		Experiência		Contexto			
	Tipo de acont.	Probabilidade	Simples	Composta	Urnas	Dados	Moedas	Roletas
1.a), 1.b), 1.c)	×			×			×	
2.a), 2.b), 2.c)		×	×		×			
3.a), 3.b), 3.c)		×	×					×
4.a), 4.b), 4.c)		×		×	×			
5.a), 5.b), 5.c)		×		×		×		

Na apresentação do questionário as questões foram ordenadas pela ordem com que foram descritas, isto é, na sequência 1, 2, 3, 4 e 5, tendo-se mantido também nas alíneas a ordem a), b) e c).

<u>Ficha de avaliação</u>. Neste segundo estudo foi usada ainda uma ficha de avaliação da aprendizagem dos alunos no tema ‘Estatística e probabilidades’, em quatro versões semelhantes, e que foi passada imediatamente após ter terminado o ensino.

No quadro 3 sintetizam-se, para cada uma das quatro fichas de avaliação, os atributos das questões relativamente ao tema, ao tipo de experiência aleatória e ao contexto.

Quadro 3. Classificação das questões das quatro fichas de avaliação segundo o tema, o tipo de experiência aleatória e o contexto.

Ficha de avaliação	Questões	Tema		Experiência		Contexto			
		Tipo de acont.	Probabi-lidade	Simples	Composta	Urnas	Dados	Roletas	Concreto
A	1	×		×			×		
	2		×	×		×			
	3		×	×		×			
	4		×	×					×
	5		×		×	×			
B	1	×		×				×	
	2		×	×		×			
	3		×	×		×			
	4		×	×					×
	5		×		×	×			
C	1	×		×		×			
	2		×	×				×	
	3		×	×		×			
	4		×	×					×
	5		×		×	×			
D	1	×		×		×			
	2		×	×				×	
	3		×	×		×			
	4		×	×					×
	5		×		×	×			

As quatro fichas de avaliação foram elaboradas pelo responsável do estudo em colaboração com as duas professores que leccionaram nas quatro turmas do grupo de controlo, tendo em vista a adequação da avaliação ao ensino efectivamente ministrado. Todas estas fichas de avaliação foram concebidas de modo a manter o mais possível a equivalência entre elas. Nesse sentido, manteve-se o conteúdo e o formato em todas as questões e, em relação aos contextos, procurou-se mantê-los também o mais possível na globalidade das fichas de avaliação (Anexo I).

Relativamente ao conteúdo, nas três alíneas da questão 1 tratava-se de definir um acontecimento possível mas não certo, um acontecimento impossível e um acontecimento certo; nas cinco alíneas da questão 2 determinavam-se probabilidades em experiências simples; nas três alíneas da questão 3 calculavam-se probabilidades em experiências simples envolvendo aspectos lógicos; na questão 4 determinavam-se probabilidades em experiências simples e aplicavam-se probabilidades, envolvendo o conceito de probabilidade condicionada através da restrição do espaço amostral e aspectos lógicos; e, por último, na questão 5 determinavam-se probabilidades em experiências compostas, incluindo extracções com e sem reposição.

Por fim, no caso dos contextos relativos às quatro fichas de avaliação, a questão 1 foi apresentada nos contextos de dados, de roletas e de urnas; a questão 2 foi apresentada no contexto de urnas e de roletas; a questão 3 foi apresentada sempre no contexto de urnas; a questão 4 foi sempre apresentada em contextos diversificados mas concretos (preferências de alunos em relação a bebidas e a clubes de futebol, número de irmãos de alunos e notas de alunos na disciplina de Matemática) e, por fim, a questão 5 foi sempre apresentada no contexto de urnas.

3.5.2. Validação dos instrumentos

A validação dos instrumentos usados nos dois estudos consistiu, fundamentalmente, na análise de validade do conteúdo. Segundo Gall, Borg e Gall (1996), a validade de conteúdo é particularmente importante quando se pretende estudar o efeito de métodos de ensino sobre o desempenho.

Em termos de fiabilidade, para Narode (1987) a inclusão de itens ou de alternativas em itens contendo concepções erradas em testes estandardizados de matemática é problemática, pois a análise dos itens a partir da teoria clássica de testes indica que a eliminação destes itens ou das alternativas aumenta a fiabilidade do teste. Segundo este autor, tal deve-se a uma baixa média de dificuldade do teste, a correlações fracas entre os itens e o teste e ao facto de alunos com desempenho elevado aderirem às concepções erradas.

De acordo com o que foi já referido, os questionários usados nos estudos dirigiam-se à identificação de intuições probabilísticas dos alunos, sejam elas erradas ou correctas. Em consequência, alguns itens dos questionários descrevem situações que despolotam concepções erradas dos alunos.

O processo de validação de cada um dos questionários decorreu basicamente em duas fases: na primeira fase, procedeu-se a um estudo piloto com alunos e, na segunda fase, os questionários foram avaliados por vários professores, considerados peritos em relação aos aspectos mais relevantes dos questionários. Assim, constituíram o painel de avaliação dos questionários, um professor universitário da área científica de probabilidades e estatística, dois professores universitários da área científica de educação e dois professores de Matemática do 3º ciclo e do ensino secundário. Com a formação deste painel, variado quanto aos elementos que o compunham, procurou-se valorizar uma avaliação dos itens do questionário no que respeita aos conteúdos, à forma e à sua adequação face aos alunos envolvidos nos estudos.

Descreve-se, seguidamente, com mais detalhe os procedimentos de validação de cada um dos questionários.

A. Questionário-conceito clássico e questionário-conceito frequencista

Estes dois questionários foram usados no ‘Estudo sobre intuições probabilísticas’. Conforme já foi referido anteriormente, os questionários são muito semelhantes, diferindo apenas nas formulações que salientam o conceito clássico de probabilidade e o conceito frequencista de probabilidade.

Na fase piloto foi apresentada aos alunos de uma turma do 9º ano de escolaridade uma primeira versão do questionário constituída por 28 questões. Durante o tempo em que os alunos estiveram a responder ao questionário, o que decorreu durante um período de duas horas com um intervalo de 10-15 minutos, os alunos foram encorajados a questionarem o autor do estudo acerca das dúvidas e dificuldades sentidas em responder aos diferentes itens. O próprio autor do estudo, dirigiu-se aos alunos, individualmente, para ouvir deles as suas dificuldades e opiniões.

Desta fase do processo de validação, tomaram-se duas decisões que se passam a referir. Com a primeira, procurou-se compatibilizar a extensão do questionário de modo a que pudesse ser respondido no tempo máximo de uma hora. Em consequência, a partir das ideias expressas pelos alunos e da representação dos três temas referidos, foram consideradas as 14 questões que constam da versão definitiva do questionário (Anexo I).

A segunda decisão prendeu-se com o formato das questões. Especificamente, no caso das questões sobre probabilidades em experiências simples e compostas, pedia-se, sequencialmente, ao aluno para identificar a situação mais provável e a situação menos provável (caso existisse), com o propósito fundamental de avaliar a coerência da sua resposta. Todavia, não se tendo observado inconsistências nas respostas dos alunos na fase de pilotagem, optou-se por incluir na versão final do questionário apenas a parte respeitante à identificação da situação mais provável.

Ainda nas questões sobre probabilidades, observou-se que alguns alunos apresentaram respostas com base nos desenhos dos objectos aleatórios que acompanhavam os respectivos enunciados. Neste caso, os alunos responderam às questões considerando a face ou faces das moedas ou dos dados que eram representados. Para evitar este enviesamento, optou-se por eliminar os desenhos destes objectos aleatórios na versão final do questionário, mantendo-se apenas os desenhos que descreviam o conteúdo das urnas.

Depois desta fase piloto, o questionário, agora constituído por 14 questões, foi apresentado ao grupo de peritos. A avaliação do questionário realizou-se através de uma ficha elaborada para o efeito (Anexo II), contemplando três dimensões: a inserção das questões em três subtemas estabelecidos – ‘Acontecimento certo, possível e impossível’, ‘Probabilidade em experiências simples’ e ‘Probabilidade em experiências compostas’ –, a acessibilidade da linguagem para os alunos e a adequação das questões aos objectivos do estudo.

Em geral, os professores avaliadores manifestaram acordo nas dimensões avaliadas e formularam algumas sugestões relacionadas com aspectos da apresentação do questionário, tendo sido todas consideradas. Além disso, um avaliador sugeriu que fosse eliminada pelo menos uma das quatro últimas questões do questionário, integradas no subtema ‘Probabilidade em experiências compostas’. Concretamente, esse avaliador referiu-se ao grau de dificuldade do raciocínio e à possibilidade de os alunos se desmotivarem, atendendo à extensão do questionário e a alguma repetição dos raciocínios implicados. Contudo, esta sugestão não foi considerada, pois, para além da evidência adquirida aquando da passagem do questionário aos alunos, teríamos de eliminar, no mínimo, o contexto das urnas ou o contraste entre a situação particular e a situação mais geral consideradas nos contextos de dados e moedas.

B. Questionário-experiência de ensino

O processo de validação deste questionário decorreu de forma muito semelhante ao que foi usado nos dois questionários anteriores.

Neste caso, na fase piloto foram testadas 25 perguntas, das quais foram seleccionadas 15 para estabelecer a versão final do questionário (Anexo I). No processo de validação estiveram envolvidas duas turmas do 9º ano de escolaridade, que já tinham estudado o tema de ‘Estatística e probabilidades’. Foi exactamente o facto destes alunos já terem estudado probabilidades na escola que distinguiu o processo de validação deste questionário, relativamente aos anteriores. Esta alteração na escolha dos sujeitos para validar o questionário deveu-se ao facto de o mesmo questionário ser usado como pré-teste e como pós-teste. Especificamente aquando da passagem do pós-teste, os sujeitos que participaram no ‘Estudo sobre o ensino de probabilidades’ teriam igualmente estudado o tema de ‘Estatística e probabilidades’.

Em relação à avaliação dos peritos, verificou-se um total acordo nas três dimensões contempladas no questionário, as mesmas que foram estabelecidas nos questionários anteriores (Anexo II). Neste questionário, como nos dois questionários anteriores, estabeleceram-se também três subtemas, embora não totalmente coincidentes: ‘Acontecimentos quase certos e quase impossíveis’, ‘Probabilidade em experiências simples’ e ‘Probabilidade em experiências compostas’.

3.6. Recolha de dados

A recolha de dados foi feita através dos três questionários e das quatro fichas de avaliação usadas nos dois estudos. Seguidamente, referimo-nos a cada um dos instrumentos utilizados, considerando os sujeitos que a eles responderam, o momento em que foram passados e o procedimento utilizado.

Questionário-conceito clássico. Este questionário foi passado a alunos do 8º e do 11º anos de escolaridade. No caso do 8º ano de escolaridade, responderam ao questionário alunos de oito turmas de quatro escolas durante os meses de Abril e Maio de 1997. Em relação ao 11º ano, responderam ao questionário alunos de nove turmas de duas escolas durante os meses de Fevereiro e Março de 1997.

Questionário-conceito frequencista. Este questionário foi passado apenas a alunos do 8º ano de escolaridade. Neste caso, responderam ao questionário alunos de oito turmas de quatro escolas durante os meses de Maio e Junho de 1997.

Questionário-experiência de ensino. Este questionário foi passado a todos os alunos das oito turmas do 9º ano de escolaridade, quatro do grupo experimental e quatro do grupo de controlo, que participaram na experiência de ensino sobre o tema ‘Estatística e probabilidades’, quer no momento do pré-teste, quer no momento do pós-teste.

Em relação ao pré-teste, quer os alunos do grupo experimental, quer os alunos do grupo de controlo, responderam ao questionário no primeiro dia de aulas da disciplina de Matemática do segundo período do ano lectivo de 1997/98, o que ocorreu nos primeiros dias de Janeiro de 1998.

No caso do pós-teste, o questionário foi passado durante os últimos dias do mês de Abril de 1998 a ambos os grupos. Deve observar-se, neste caso, que o questionário foi passado decorridos cerca de um mês e meio após ter terminado a experiência de ensino, que terminou no princípio do mês de Fevereiro de 1998. Com este lapso de tempo, decorrido entre o fim do ensino e a passagem do questionário, procurou-se avaliar as aquisições dos alunos a um nível de retenção mais profunda.

Quanto aos procedimentos usados na passagem dos três questionários, eles foram essencialmente idênticos. Para todos eles, foi pedida autorização ao Conselho Directivo da Escola, seguindo-se o contacto com os professores de Matemática das respectivas turmas.

Em todos os questionários os alunos dispuseram de um tempo máximo de 60 minutos para responder, tendo constituído um tempo suficiente para responder aos diferentes questionários usados.

Excepto em duas turmas, foi o autor do estudo que procedeu à passagem dos questionários em todas as turmas de ambos os estudos. Esta excepção aconteceu na passagem do questionário-experiência de ensino, em relação ao pré-teste, em virtude da necessidade de passar o questionário a duas turmas no mesmo horário. Neste caso, o autor do estudo teve a colaboração da sua Orientadora. Além do responsável pelo estudo, esteve sempre presente um professor da turma, concretamente o professor que tinha a turma na hora em que o questionário foi passado. Esse professor foi sempre o professor de Matemática, menos em duas turmas do questionário-conceito clássico, em que estiveram presentes os professores de Português e de Educação Física das respectivas turmas.

Antes dos alunos começarem a responder ao questionário respectivo, o autor do estudo ou a sua Orientadora informaram-nos dos objectivos do estudo e explicaram a forma de responder ao questionário.

Em relação aos objectivos do estudo, foi explicado aos alunos que era de importância decisiva que eles relatassem claramente as suas ideias em cada uma das situações apresentadas, considerando a resposta que, do seu ponto de vista, lhes parecia ser a mais correcta.

No caso dos dois questionários usados no 'Estudo sobre intuições probabilísticas', salientaram-se as três partes de cada questão: a parte de escolha múltipla, a parte do raciocínio e a parte da confiança. No questionário usado no 'Estudo sobre o ensino de probabilidades', salientaram-se as duas partes de cada questão: a parte de escolha múltipla e a parte do raciocínio.

Na parte de escolha múltipla, foi dito aos alunos que deviam assinalar com uma cruz (×) a afirmação que lhes parecia ser a correcta, de entre as várias afirmações estabelecidas. Na parte do raciocínio, foi-lhes dito que deviam explicar as razões porque tinham escolhido a afirmação anterior e não qualquer uma das outras possíveis. A este propósito, foi pedido aos alunos que se esforçassem por serem claros na descrição dos seus raciocínios e que evitassem repetir, em parte ou no todo, o enunciado da questão. Finalmente, na parte da confiança, foi explicado aos alunos que se tratava de assinalar, também com uma cruz (×), o grau de confiança com que tinham respondido às duas partes anteriores da questão.

Aquando da apresentação do questionário e durante o tempo em que decorreu a sua passagem, os alunos foram incentivados a responderem a todas as questões, mesmo que não estivessem totalmente certos da resposta a dar. Neste sentido, o autor do estudo e o professor da turma questionaram os alunos acerca da existência de questões a que não tivessem respondido. Caso existissem, eles foram incentivados a pensarem mais uma vez na questão respectiva, tendo-lhes sido sugerido que começassem por ler novamente a questão. Esta estratégia mostrou-se muito eficaz, pois foram muito poucos os alunos que não responderam a todas as questões.

Considerando que a existência de dificuldades de cálculo poderia constituir um obstáculo à expressão das ideias dos alunos, foi-lhes dito, explicitamente, na passagem de todos os questionários que poderiam usar a sua calculadora ou pedir uma calculadora aos professores presentes na sala.

Finalmente, foi dito aos alunos que, apesar dos resultados do respectivo questionário não influenciarem de qualquer maneira a sua avaliação escolar, esperava-se que eles respondessem ao questionário com empenho e de forma honesta e sincera, pois só assim se poderiam obter resultados válidos para o estudo que se estava a realizar. No caso da honestidade, salientou-se a importância de se darem respostas genuinamente pessoais, pois, de outro modo, tais respostas contribuiriam para a obtenção de resultados fictícios, não traduzindo a realidade existente. Assim, para minimizar as possibilidades dos alunos comunicarem entre si, o autor do estudo e o professor da turma estiveram atentos durante todo o tempo de passagem dos respectivos questionários e adoptaram-se procedimentos cautelares. Neste último caso, sempre que possível, os alunos sentaram-se em mesas individuais e, quando tal não foi possível, os alunos sentaram-se em extremos opostas da mesa com os seus objectos pessoais a separá-los.

Fichas de avaliação. As quatro fichas de avaliação, semelhantes entre si, foram passadas, quer ao grupo experimental, quer ao grupo de controlo, logo após ter terminado a experiência de ensino. Em termos de localização no tempo, tal significou que os alunos responderam às fichas de avaliação durante as duas primeiras semanas do mês de Fevereiro de 1998.

Neste caso, tratando-se de instrumentos destinados a avaliar a realização escolar no tema de 'Estatística e probabilidades', integrado na disciplina de Matemática, foram os professores de Matemática das respectivas turmas a passarem as fichas de avaliação nas oito turmas do conjunto dos grupos experimental e de controlo.

Tal como nos questionários, os alunos dispuseram de um tempo máximo de 60 minutos para responder à ficha de avaliação, tendo sido acordado entre os professores não prestar qualquer esclarecimento que pudesse constituir uma pista para responder a qualquer questão. Tal como nos questionários, perante uma pergunta, o aluno foi convidado a ler de novo o enunciado da questão.

Para dificultar o possível diálogo entre os alunos, além dos procedimentos adoptados no caso dos questionários, usaram-se, em cada turma, duas fichas de avaliação diferentes, embora semelhantes em relação aos conteúdos e ao nível de dificuldade.

Nas fichas de avaliação, tal como nos questionários, os alunos puderam usar uma calculadora para efectuar cálculos.

Por fim, com o propósito de homogeneizar os critérios de correcção das fichas de avaliação, estabeleceram-se as cotações das perguntas, apresentaram-se exemplos de possíveis respostas às perguntas com as respectivas distribuições das cotações e implementou-se um processo de correcção das fichas em duas fases. Na primeira fase, os professores das respectivas turmas corrigiram as fichas de avaliação dos seus alunos e, na segunda fase, todas as fichas de avaliação foram corrigidas novamente por um desses professores.

3.7. Análise de dados

No estudo, a análise estatística foi feita através da utilização do programa de estatística *StatView SE+Graphics*™, que corria num computador Macintosh.

Nos estudos realizados nesta investigação adoptou-se o valor 0.05 para nível de significância estatística e, consequentemente, reconheceram-se diferenças estatisticamente significativas para $p<0.05$. Deve considerar-se ainda que, no caso da comparação de duas médias, foram efectuados sempre testes bilaterais.

A descrição do processo de análise de dados faz-se a partir de cada uma das questões de investigação consideradas nos dois estudos.

3.7.1. Estudo sobre intuições probabilísticas

Deve atender-se que nos dois questionários usados neste estudo, as diferentes perguntas agruparam-se em três subtemas distintos (‘Acontecimento certo, possível e impossível’, ‘Probabilidade em experiências simples’ e ‘Probabilidade em experiências compostas'). Salienta-se, desde já, que, para além do tratamento individual de cada pergunta, considerou-se, muitas vezes, o conjunto das questões dos respectivos subtemas e mesmo o conjunto de todas as perguntas do questionário.

Questão de investigação 1. Que intuições probabilísticas possuem alunos do 8º de escolaridade comparativamente com alunos do 11º ano de escolaridade?

Nesta questão de investigação estudaram-se as respostas e os raciocínios dos alunos do 8º e do 11º anos de escolaridade nas diferentes perguntas do questionário-conceito clássico. No 11º ano, distinguiram-se ainda o grupo de alunos com ensino de probabilidades (*cep*) do grupo de alunos sem ensino de probabilidades (*sep*).

Em relação à variável resposta, determinaram-se as percentagens com que as várias respostas possíveis foram seleccionadas. No caso da variável raciocínio, as explicações apresentadas pelos alunos foram categorizadas e calcularam-se as percentagens de alunos que a elas aderiram. Tanto no caso da variável resposta como no caso da variável raciocínio, compararam-se ambos os grupos de alunos a partir das respectivas percentagens obtidas.

Considerando as perguntas do questionário que se incluem num mesmo subtema, recorreu-se à percentagem de respostas correctas nas várias perguntas para comparar, nesse subtema, os grupos de alunos definidos pela variável ano escolar e, no 11º ano, pela variável ensino de probabilidades.

Para os subtemas cujas questões envolviam a explicitação de raciocínios, utilizou-se a percentagem de alunos nos 'raciocínios gerais' das várias questões, enquanto raciocínios que garantem a escolha da resposta correcta, para comparar, em cada subtema, os grupos de alunos do 11º ano definidos pela variável ensino de probabilidades.

Questão de investigação 2. Há diferenças nas respostas correctas em relação às variáveis ano escolar, desempenho em matemática, sexo, ensino de probabilidades e interpretação do conceito de probabilidade, entre alunos do 8º ano e/ou do 11º ano de escolaridade?

Nesta questão de investigação, essencialmente, compararam-se as respostas correctas dos alunos em relação a várias variáveis e a partir de dados obtidos nos dois questionários.

Na variável ano escolar, compararam-se as respostas correctas dos alunos do 8º ano e do 11º ano, obtidas no questionário-conceito clássico, relativamente a cada questão, a cada subtema considerado e ao questionário. No caso das questões, tomadas individualmente, aplicou-se o teste χ^2 com correcção de continuidade à tabela de contingência de 2×2, definida pelas respostas correctas e erradas nos dois anos escolares. No caso dos subtemas e do questionário, considerou-se o número de respostas correctas de cada aluno no subtema ou no questionário e utilizou-se o teste de Mann-Whitney para comparar os dois grupos.

Quanto à variável desempenho em matemática, compararam-se as respostas correctas dos alunos, obtidas no questionário-conceito clássico, em cada um dos dois anos escolares. Depois de codificado o desempenho de cada aluno em baixo, médio e elevado, e de determinado o número das suas respostas correctas em cada subtema e no questionário, compararam-se os grupos de desempenho, em cada ano escolar, através da aplicação do teste de Kruskal-Wallis.

No caso da variável sexo, compararam-se as respostas correctas, obtidas no questionário-conceito clássico, segundo o sexo dos alunos em cada um dos anos escolares. Após determinado o número de respostas correctas de cada aluno em cada subtema e no questionário, recorreu-se ao teste de Mann-Whitney para comparar os dois grupos de alunos, em cada ano escolar.

A variável ensino de probabilidades foi estudada apenas entre os alunos do 11º ano e com base nas respostas correctas obtidas no questionário-conceito clássico. Tal como na variável sexo, calculou-se o número de respostas correctas de cada aluno em cada subtema e no questionário, aplicando-se, seguidamente, o teste de Mann-Whitney para comparar o grupo de alunos com ensino de probabilidades (*cep*) com o grupo de alunos sem ensino de probabilidades (*sep*).

Por último, a variável interpretação do conceito de probabilidade foi estudada a partir dos alunos do 8º ano. Neste caso, contrastaram-se as respostas correctas obtidas no questionário-conceito clássico com as respostas correctas obtidas no questionário-conceito frequencista. Tal como no caso da variável ano escolar, consideraram-se as respostas correctas em cada questão, em cada subtema e no questionário. No caso das questões, aplicou-se o teste χ^2 com correcção de continuidade à tabela de contingência de 2×2, definida pelas respostas correctas e erradas e pelos conceitos clássico e frequencista; no caso dos subtemas e do questionário, recorreu-se ao teste de Mann-Whitney para comparar os dois grupos de alunos do 8º ano correspondentes às duas interpretações do conceito de probabilidade.

Questão de investigação 3. Há diferenças na confiança nas respostas, em relação às variáveis ano escolar, desempenho em matemática, sexo e ensino de probabilidades, entre alunos do 8º ano e/ou do 11º ano de escolaridade?

Nesta questão de investigação compararam-se as confianças que os alunos depositaram nas respostas (correctas e erradas), nas respostas correctas e nas respostas erradas.

Deve recordar-se que a variável confiança foi estudada a partir apenas de 11 questões do questionário-conceito clássico, e não de todas as questões. Tal como já foi referido antes, nas três primeiras questões pedia-se aos alunos que afirmassem uma confiança média no conjunto das cinco alíneas que faziam parte dessas questões.

Depois de calculada, para cada aluno, a média das confianças nas 11 questões, a média das confianças nas respostas correctas e a média das confianças nas respostas erradas, estabeleceram-se as várias comparações a partir das variáveis consideradas.

No caso da variável ano escolar, compararam-se, entre os alunos do 8º ano e do 11º ano, a confiança nas respostas (correctas e erradas), nas respostas correctas e nas respostas erradas com base no teste t de Student. Comparou-se, ainda, a confiança nas respostas correctas com a confiança nas respostas erradas em cada um dos anos escolares, recorrendo também ao teste t de Student.

Quanto à variável desempenho em matemática, estabeleceram-se comparações entre a confiança nas respostas (correctas e erradas), nas respostas correctas e nas respostas erradas em cada um dos anos escolares, considerando os níveis baixo, médio e elevado de desempenho e efectuando uma análise de variância para comparação das médias.

A partir da variável sexo compararam-se as confianças nas respostas (correctas e erradas), nas respostas correctas e nas respostas erradas em cada um dos anos escolares. Tal como no caso da variável ano escolar, recorreu-se ao teste t de Student para efectuar as comparações.

Por fim, a partir da variável ensino de probabilidades compararam-se as confianças nas respostas (correctas e erradas), nas respostas correctas e nas respostas erradas entre os alunos do 11º ano. Tal como no caso da variável ano escolar, recorreu-se ao teste t de Student para efectuar as comparações.

3.7.2. Estudo sobre o ensino de probabilidades

Questão de investigação 4. No 9º ano de escolaridade, um tipo de ensino que considere as ideias intuitivas dos alunos tem um maior impacto na aprendizagem de probabilidades, comparativamente com um ensino tradicional, no que respeita às intuições, às respostas correctas e ao cálculo de probabilidades?

A. Intuições probabilísticas

Ao nível das intuições probabilísticas, tal como na questão de investigação 1, estudaram-se, a um nível descritivo, as respostas e os raciocínios dos alunos do grupo experimental e do grupo de controlo em relação ao questionário-experiência de ensino, no pré-teste e no pós-teste.

Relativamente à variável resposta, determinaram-se as percentagens com que foram seleccionadas as várias respostas possíveis. No caso da variável raciocínio, depois de categorizadas as explicações apresentadas pelos alunos, calcularam-se também as percentagens de alunos que aderiram aos vários raciocínios. Tanto no caso da variável resposta como no caso da variável raciocínio, compararam-se ambos os grupos de alunos (experimental e controlo), no pré-teste e no pós-teste, a partir das respectivas percentagens.

Considerando as três perguntas que se incluem em cada subtema, recorreu-se, nessas perguntas, à percentagem de respostas correctas e de 'raciocínios gerais', enquanto raciocínios que garantem a escolha da resposta correcta, para comparar, globalmente, os dois grupos de alunos nesse subtema. No caso dos raciocínios gerais, apenas foram comparados os dois grupos nos quatro últimos subtemas.

B. Respostas correctas

A este nível, compararam-se as respostas correctas considerando o momento (pré-teste e pós-teste), o grupo (experimental e controlo) e as variáveis desempenho em matemática e sexo.

No caso da comparação entre os dois grupos de alunos, efectuaram-se comparações no pré-teste e no pós-teste, relativamente a cada questão, a cada subtema e no questionário. Em cada questão, os grupos foram comparados através da aplicação do teste χ^2 com correcção de continuidade à tabela de contingência de 2×2, definida pelo número de respostas correctas e erradas em cada um dos dois grupos. Depois de determinado o número de respostas correctas de cada aluno em cada subtema e no questionário, compararam-se os dois grupos utilizando o teste de Mann-Whitney. Por fim, em relação ao questionário, efectuou-se uma análise de variância de dois factores com medidas repetidas, considerando a variável grupo e a variável respostas correctas no pré-teste e no pós-teste.

Quanto à variável desempenho em matemática, considerou-se o número de respostas correctas de cada aluno por subtema e no questionário no pós-teste e em cada um dos grupos. Seguidamente, aplicando o teste de Kruskal-Wallis comparou-se, no grupo experimental e no grupo de controlo, o número de respostas correctas segundo o nível de desempenho baixo, médio e elevado. Por fim, em relação ao questionário, efectuou-se uma análise de variância de dois factores com medidas repetidas, no grupo experimental e no grupo de controlo, considerando a variável desempenho em matemática e a variável respostas correctas no pré-teste e no pós-teste.

Também na variável sexo, considerou-se o número de respostas correctas de cada aluno por subtema e no questionário, no pós-teste e em cada um dos grupos. Neste caso, aplicou-se o teste de Mann-Whitney para comparar, no grupo experimental e no grupo de controlo, o número de respostas correctas segundo o sexo. Finalmente, em relação ao questionário, efectuou-se uma análise de variância de dois factores com medidas repetidas, no grupo experimental e no grupo de controlo, considerando a variável sexo e a variável respostas correctas no pré-teste e no pós-teste.

C. Cálculo de probabilidades

Ao nível do cálculo de probabilidades, consideraram-se as classificações obtidas pelos alunos numa ficha de avaliação sobre o tema de probabilidades. Partindo das classificações obtidas pelos alunos em cada questão, em cada subtema e na ficha de avaliação, compararam-se os dois grupos através da aplicação do teste t de Student. Finalmente, em relação à classificação da ficha de avaliação, compararam-se, no grupo experimental e no grupo de controlo, os três grupos determinados pela variável desempenho em matemática, recorrendo à análise de variância com um factor, e os dois grupos determinados pela variável sexo, recorrendo ao teste t de Student.

C A P Í T U L O I V

RESULTADOS

4.1. Introdução

Neste capítulo faz-se a apresentação e análise dos resultados obtidos na investigação realizada. Esta investigação, incidindo em conteúdos elementares de probabilidades, é constituída por dois estudos: um ‘Estudo sobre intuições probabilísticas’ e um ‘Estudo sobre o ensino de probabilidades’.

Considerando os dois estudos referidos, optou-se por apresentar separadamente os resultados obtidos em cada um deles. Em relação a cada um dos estudos, apresentam-se e analisam-se os resultados obtidos por referência a variáveis ou grupos de variáveis desse estudo.

4.2. Estudo sobre intuições probabilísticas

Neste estudo identificam-se e caracterizam-se intuições probabilísticas de alunos do 8º ano e do 11º ano em conteúdos elementares de probabilidades.

Os dados usados neste estudo foram obtidos através de dois questionários: o questionário-conceito clássico e o questionário-conceito frequencista.

A apresentação dos resultados obtidos é feita em três subsecções: ‘Respostas e raciocínios’, ‘Respostas correctas’ e ‘Confiança nas respostas’.

4.2.1. Respostas e raciocínios

Nesta subsecção analisam-se as respostas e os raciocínios apresentados pelos alunos ao responderem às 14 questões do questionário-conceito clássico (Anexo I).

Relativamente aos raciocínios, e por impossibilidade do aluno escrever todos os raciocínios subjacentes a todas as questões num tempo limite de 60 minutos, tempo de que os alunos dispuseram para responder ao questionário, recorda-se que não foi pedido aos alunos que explicassem os seus raciocínios em todas as 14 questões. Concretamente, foi pedido aos alunos que escrevessem o raciocínio subjacente à resposta em todas as questões a partir da quarta (inclusive).

Para efeitos da apresentação dos resultados, as questões são agrupadas em três subtemas: (A) 'Acontecimento certo, possível e impossível', (B) 'Probabilidade em experiências simples' e (C) 'Probabilidade em experiências compostas'.

Em relação às questões em que foi pedido aos alunos que descrevessem o raciocínio que conduziu à respectiva resposta, foram estabelecidas em cada questão diferentes categorias. Dessas categorias, a categoria *Outros* foi estabelecida em todas as questões, pelo que é agora descrita. Nela incluíram-se os raciocínios que não são inteligíveis, que repetem exclusivamente algo que é afirmado no enunciado da questão e os alunos que não apresentaram qualquer raciocínio.

Em cada questão, apresentam-se as percentagens de alunos do 8º ano e do 11º ano que escolheram cada uma das várias respostas possíveis. Além disso, no caso dos alunos do 11º ano, distinguem-se ainda as percentagens de alunos com ensino de probabilidades (*cep*) e sem ensino de probabilidades (*sep*) nessas respostas.

Em relação aos raciocínios, nas questões que os contemplavam, procedeu-se a uma apresentação idêntica à adoptada nas respostas.

No Anexo IV apresentam-se transcrições de exemplos de raciocínios referidos pelos alunos, em relação às questões que os incluíam.

A. Acontecimento certo, possível e impossível

Neste subtema incluem-se três questões: a questão 1, que se insere no contexto da extracção de uma bola de um saco, a questão 2, que se insere no contexto do lançamento de um dado, e a questão 3, que se insere no contexto da extracção de duas bolas de um saco. Destaca-se, ainda, que as questões 1 e 2 tratam da classificação de acontecimentos em experiências simples e a questão 3 trata da classificação de acontecimentos em experiências compostas.

Questão 1. Um saco contém uma bola branca, uma bola preta e uma bola cinzenta. Sem ver, tira-se uma bola do saco.

Saco: ○ ● ◍

Diga se se obtém de certeza, se é possível obter ou se é impossível obter:

a) uma bola branca; ☐ de certeza ☐ é possível ☐ é impossível
b) uma bola cinzenta; ☐ de certeza ☐ é possível ☐ é impossível
c) uma bola vermelha; ☐ de certeza ☐ é possível ☐ é impossível
d) uma bola não verde; ☐ de certeza ☐ é possível ☐ é impossível
e) uma bola não preta. ☐ de certeza ☐ é possível ☐ é impossível

Respostas. Esta questão trata da classificação de vários acontecimentos em certo, possível ou impossível, na experiência de extracção de uma bola de um saco.

Na Tabela 3 estão registados, sob a forma de percentagem, os resultados das respostas dos alunos nas cinco alíneas desta questão.

Tabela 3. Percentagem de alunos nas respostas das alíneas da questão 1 por ano escolar e ensino de probabilidades.

	RESPOSTAS											
	8º ANO (n=204)			11º ANO (n=209)								
	Certo	Possível	Impossível	Certo			Possível			Impossível		
ALÍNEAS				*cep*	*sep*	Total	*cep*	*sep*	Total	*cep*	*sep*	Total
a)	6.9	93.1*	0.0	1.9	3.8	2.9	98.1*	96.2*	97.1*	0.0	0.0	0.0
b)	7.8	91.7*	0.5	1.9	2.9	2.4	98.1*	97.1*	97.6*	0.0	0.0	0.0
c)	0.0	1.0	99.0*	0.0	1.0	0.5	1.9	1.0	1.4	98.1*	98.0*	98.1*
d)	48.5*	35.8	15.7	77.1*	74.0*	75.6*	16.2	18.3	17.2	6.7	7.7	7.2
e)	8.3	81.9*	9.8	1.0	3.8	2.4	95.2*	93.3*	94.3*	3.8	2.9	3.3

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Observando os valores da Tabela 3, verifica-se que, relativamente às alíneas a), b) e c), mais de 90% dos alunos do 8º ano e do 11º ano escolheram a resposta correcta. Já no caso das alíneas d) e e), a percentagem de alunos que escolheu a resposta correcta em cada um dos dois grupos foi inferior, particularmente na alínea d).

A representação gráfica, que pode ser observada na Figura 2, mostra que os alunos do 8º ano apresentam uma percentagem de respostas correctas consideravelmente inferior à dos alunos do 11º ano nas alíneas d) e e).

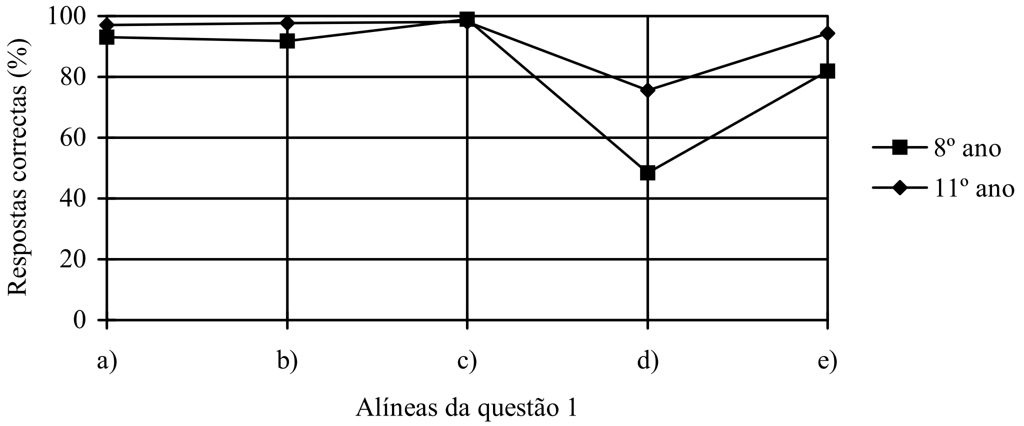


Figura 2. Percentagem de respostas correctas nas alíneas da questão 1 por ano escolar.

Entre os alunos do 11º ano com ensino de probabilidades (*cep*) e sem ensino de probabilidades (*sep*) observaram-se percentagens semelhantes nas várias respostas das diferentes alíneas. Considerando apenas as respostas correctas nas várias alíneas, observa-se pela Figura 3 que também foram seleccionadas por percentagens semelhantes de alunos de ambos os grupos.

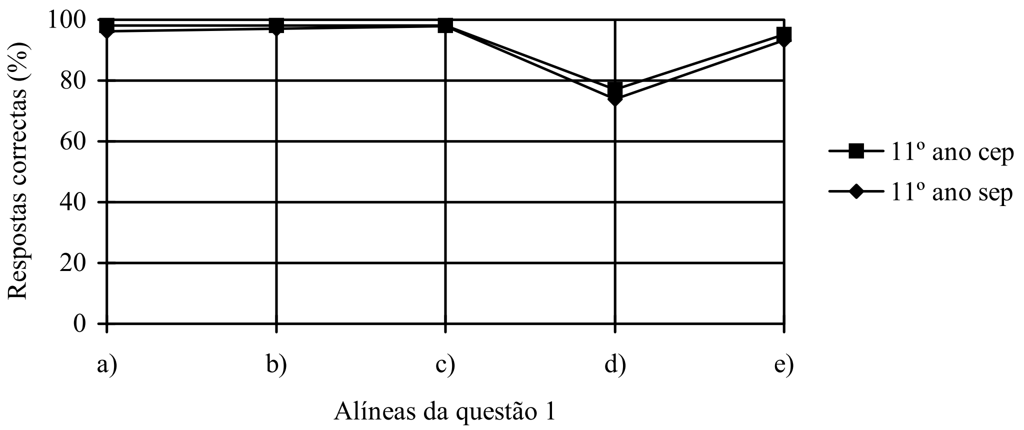


Figura 3. Percentagem de respostas correctas dos alunos do 11º ano nas alíneas da questão 1 por ensino de probabilidades.

A maior dificuldade revelada pelos alunos nas alíneas d) e e) pode ser explicada pelo facto de os acontecimentos envolverem o conectivo *não*. No caso da alínea d), que foi a alínea em que se verificaram as menores percentagens de respostas correctas, deve ser observado ainda que se trata de um acontecimento certo.

Questão 2. Lança-se um dado e conta-se o número de pintas da face que fica virada para cima. Relativamente ao resultado do lançamento do dado, diga se se obtém de certeza, se é possível obter ou se é impossível obter:

a) um número par;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
b) um número menor do que 7;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
c) um número maior do que 6;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
d) um número maior do que 0;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
e) o número 5.	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível

Respostas. Esta questão trata da classificação de vários acontecimentos em certo, possível ou impossível, na experiência de lançamento de um dado.

Observando os valores da Tabela 4, que sintetizam as respostas dos alunos a esta questão, verifica-se que mais de 90% dos alunos do 8º ano e do 11º ano escolheram a resposta correcta nas alíneas a), c) e e). Comparativamente, no caso das alíneas b) e d) as percentagens de respostas correctas foram ligeiramente inferiores.

Tabela 4. Percentagem de alunos nas respostas das alíneas da questão 2 por ano escolar e ensino de probabilidades.

	RESPOSTAS											
	8º ANO (n=204)[1]			11º ANO (n=209)								
	Certo	Possível	Impossível	Certo			Possível			Impossível		
ALÍNEAS				*cep*	*sep*	Total	*cep*	*sep*	Total	*cep*	*sep*	Total
a)	3.9	95.6*	0.5	0.0	1.0	0.5	100.0*	99.0*	99.5*	0.0	0.0	0.0
b)	75.0*	21.6	3.4	87.6*	90.4*	89.0*	9.5	8.6	9.1	2.9	1.0	1.9
c)	0.0	2.0	98.0*	0.0	0.0	0.0	3.8	1.0	2.4	96.2*	99.0*	97.6*
d)	82.3*	15.7	2.0	88.6*	94.2*	91.4*	9.5	5.8	7.6	1.9	0.0	1.0
e)	4.4	94.1*	1.5	0.0	1.9	1.0	100.0*	98.1*	99.0*	0.0	0.0	0.0

Nota – [1] No 8º ano e na alínea e) n=203. A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

A representação gráfica, que consta da Figura 4, destaca que os alunos do 8º ano apresentaram uma percentagem de respostas correctas sensivelmente inferior à dos alunos do 11º ano nas alíneas b) e d). Destaca-se, novamente, que os acontecimentos estabelecidos nestas alíneas são acontecimentos certos.

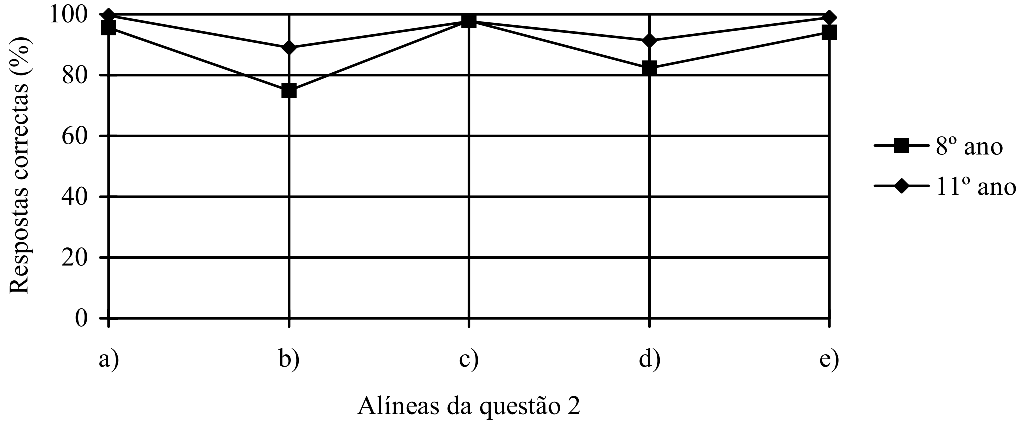


Figura 4. Percentagem de respostas correctas nas alíneas da questão 2 por ano escolar.

No caso dos alunos do 11º ano, não se salientam discrepâncias consideráveis entre as percentagens de alunos *cep* e as percentagens de alunos *sep* nas diferentes respostas das várias alíneas. Considerando apenas as respostas correctas nas diferentes alíneas, observa-se pela Figura 5 que também foram seleccionadas por percentagens semelhantes de alunos de ambos os grupos.

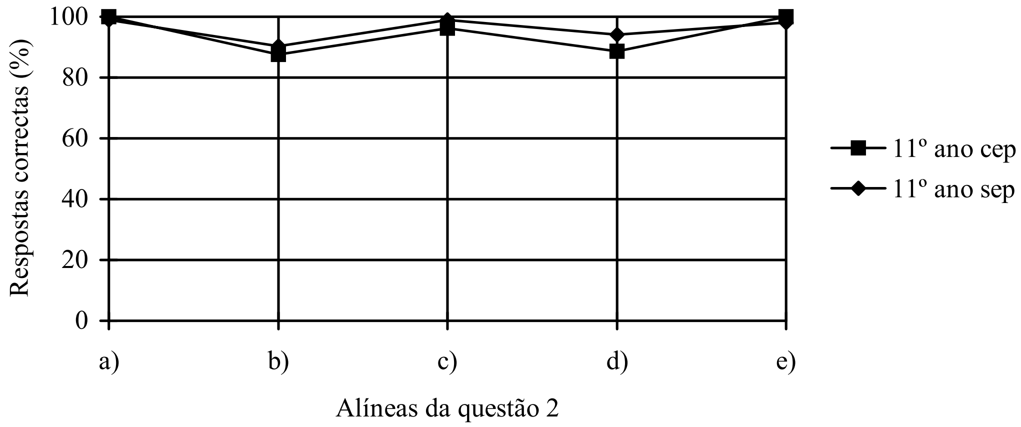


Figura 5. Percentagem de respostas correctas dos alunos do 11º ano nas alíneas da questão 2 por ensino de probabilidades.

Os resultados obtidos nas questões 1 e 2 permitem afirmar que na classificação de um acontecimento em certo, possível e impossível em experiências simples ambos os grupos de alunos sentiram mais dificuldades na classe dos acontecimentos certos, tendo sido mais notórias essas dificuldades nos alunos do 8º ano. Estas dificuldades aumentaram quando na formulação do acontecimento intervinha o conectivo *não*.

Estes resultados revelam ainda que no caso dos acontecimentos certos, muitos dos alunos que não os reconheceram enquanto tal, classificaram-nos como acontecimentos possíveis. Este padrão de respostas foi mais frequente entre os alunos do 8º ano do que entre os alunos do 11º ano. Já quando se tratava de acontecimentos impossíveis, a situação foi diferente. Neste caso, muito poucos alunos classificaram um acontecimento impossível como sendo possível. Assim, os resultados obtidos sugerem que os alunos têm mais dificuldades em identificar um acontecimento certo comparativamente com um acontecimento impossível, estando tais dificuldades relacionadas com uma não clara distinção entre acontecimento certo e acontecimento possível.

Questão 3. Um saco contém uma bola branca, uma bola preta e uma bola cinzenta. Sem ver, tiram-se de uma só vez duas bolas do saco.

Saco: ○ ● ◍

Diga se se obtém de certeza, se é possível obter ou se é impossível obter:

a) uma bola branca e uma bola preta;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
b) duas bolas cinzentas;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
c) uma das duas bolas não cinzenta;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
d) uma bola branca e outra não branca;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
e) uma das duas bolas branca ou preta.	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível

Respostas. Esta questão trata da classificação de vários acontecimentos em certo, possível ou impossível, na experiência de extracção de duas bolas de um saco.

Observando os valores da Tabela 5, verifica-se que mais de 90% dos alunos do 8º ano e do 11º ano responderam correctamente às alíneas a) e b). No caso das alíneas c), d) e e) as percentagens de respostas correctas são consideravelmente inferiores para os dois grupos de alunos. Nestas últimas alíneas verificou-se uma diminuição da percentagem de respostas correctas ao passar-se de d) para e) e de e) para c).

Tabela 5. Percentagem de alunos nas respostas das alíneas da questão 3 por ano escolar e ensino de probabilidades.

	RESPOSTAS											
	8º ANO (n=204)			11º ANO (n=209)								
	Certo	Possível	Impossível	Certo			Possível			Impossível		
ALÍNEAS				*cep*	*sep*	Total	*cep*	*sep*	Total	*cep*	*sep*	Total
a)	5.9	93.1*	1.0	0.0	1.9	1.0	100.0*	98.1*	99.0*	0.0	0.0	0.0
b)	0.5	3.4	96.1*	0.0	0.0	0.0	1.0	1.9	1.4	99.0*	98.1*	98.6*
c)	17.6*	76.0	6.4	17.1*	32.7*	24.9*	80.0	65.4	72.7	2.9	1.9	2.4
d)	20.6	75.5*	3.9	14.3	16.3	15.3	85.7*	80.8*	83.3*	0.0	2.9	1.4
e)	29.1*	54.7	16.2	52.4*	50.0*	51.2*	39.0	47.1	43.1	8.6	2.9	5.7

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Observando o gráfico da Figura 6, verifica-se que, na alínea e), a percentagem de respostas correctas dos alunos do 11º ano é consideravelmente superior à correspondente percentagem dos alunos do 8º ano.

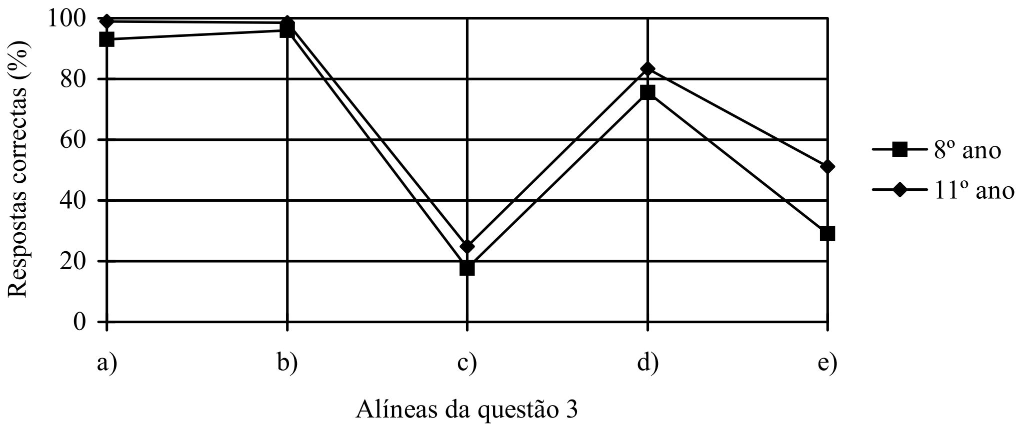


Figura 6. Percentagem de respostas correctas nas alíneas da questão 3 por ano escolar.

Entre os alunos do 11º ano *cep* e *sep*, relativamente à percentagem de alunos nas respostas às diferentes alíneas, salientam-se pequenas discrepâncias na alínea e) e discrepâncias mais acentuadas na alínea c). Considerando apenas as respostas correctas nas várias alíneas, verificou-se que à excepção da alínea c), em que a resposta correcta foi seleccionada por uma percentagem de alunos consideravelmente superior no grupo *sep*, em todas as outras alíneas obtiveram-se percentagens semelhantes em ambos os grupos, conforme se observa na Figura 7.

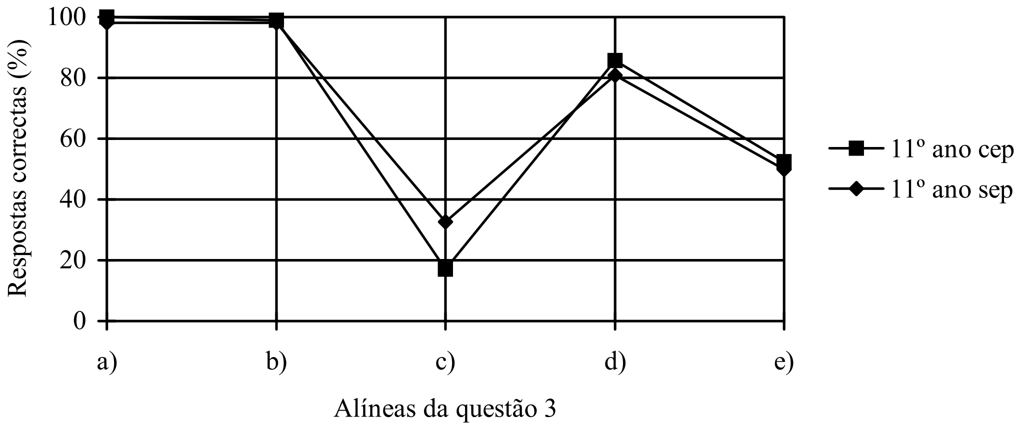


Figura 7. Percentagem de respostas correctas dos alunos do 11º ano nas alíneas da questão 3 por ensino de probabilidades.

Observando os acontecimentos em que as percentagens de respostas correctas são mais baixas, verifica-se que esses acontecimentos são certos e/ou na sua formulação são utilizados conectivos lógicos. Na alínea c) estabelece-se um acontecimento certo e é usado o conectivo *não*, na alínea d) estabelece-se um acontecimento possível e é usado o conectivo *não* e na alínea e) estabelece-se um acontecimento certo e é usado o conectivo *ou*. Considerando o tipo de acontecimento, conclui-se, ainda, que os alunos tiveram mais dificuldades em identificar os acontecimentos certos.

Tal como no caso das experiências simples, também nas experiências compostas a dificuldade em classificar um acontecimento em certo, possível e impossível aumenta quando o acontecimento é certo e quando são usados os conectivos *ou* ou *não* na sua formulação. No caso das experiências compostas, esta dificuldade aumentou e, em geral, mais alunos do 8º ano apresentaram dificuldades em responder correctamente.

B. Probabilidade em experiências simples

Neste tema incluem-se seis questões: as questões 4, 5, 6 e 7, que se inserem no contexto da extracção de uma bola de um saco, e as questões 8 e 9, que se inserem no contexto do lançamento de um dado. Seguidamente, para cada questão, apresentam-se as percentagens de alunos nas diferentes respostas possíveis e nos raciocínios estabelecidos.

Questão 4. Um saco I contém duas bolas brancas e três bolas pretas, e um saco II contém três bolas brancas e duas bolas pretas. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos.

Saco I: ○○●●● **Saco II**: ○○○●●

De qual dos sacos é mais provável obter uma bola branca?

☐ Do saco I.

☐ Do saco II.

☐ É igualmente provável obter uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

Respostas. Nesta questão, comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter uma bola branca do saco I* e *Obter uma bola branca do saco II* na experiência de extracção de uma bola de cada saco, considerando que é igual o número total de bolas em ambos os sacos.

Os resultados obtidos nesta questão, que podem ser consultados na Tabela 6, revelam que os alunos, quer do 8º ano, quer do 11º ano, afirmaram em mais de 90% dos casos que é mais provável *Obter uma bola branca do saco II*, que é a resposta correcta à questão.

Tabela 6. Percentagem de alunos nas respostas da questão 4 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RESPOSTAS	8º ANO (n=204)	11º ANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
Obter uma bola branca do saco I.	0.0	0.0	0.0	0.0
Obter uma bola branca do saco II.*	90.7	100.0	99.0	99.5
É igualmente provável.	9.3	0.0	1.0	0.5

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Destaca-se, ainda, que nenhum aluno de ambos os anos afirmou ser mais provável *Obter uma bola branca do saco I* e uma pequena percentagem de alunos do 8º ano afirmou ser igualmente provável obter uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

Em face destes resultados, podemos concluir que os alunos de ambos os anos não tiveram dificuldade em comparar as probabilidades de obter uma bola branca em dois sacos com o mesmo número total de bolas.

Entre os alunos do 11º ano, as percentagens de alunos *cep* nas várias respostas foram semelhantes às correspondentes percentagens de alunos *sep*.

Raciocínios. A percentagem de alunos que aderiram aos diferentes raciocínios referidos pelos alunos para explicarem as suas respostas podem ser observados na Tabela 7.

Tabela 7. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 4 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RACIOCÍNIOS	8ºANO (n=204)	11ºANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
Comparar o número de bolas brancas.	60.3	40.0	61.5	50.7
Comparar o número de bolas brancas e pretas.	26.9	22.9	24.0	23.5
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	1.0	35.2	12.5	23.9
Ambos os acontecimentos são possíveis.	9.8	0.0	1.0	0.5
Outros.	2.0	1.9	1.0	1.4

O raciocínio *Comparar o número de bolas brancas*, consistiu em observar que o saco II tem mais bolas brancas do que o saco I ou, mais especificamente, em observar que o saco II tem mais uma bola branca do que o saco I. A adesão a este raciocínio, mais referido no 8º ano, levou os alunos a afirmarem a maior probabilidade de obter uma branca do saco II, que é a resposta correcta.

No raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas*, os alunos estabeleceram comparações entre os dois sacos e em cada um dos sacos. Quando se comparou o número de bolas da mesma cor nos dois sacos, os alunos observaram que o saco II tem mais bolas brancas e menos bolas pretas que o saco I ou o saco II tem mais bolas brancas que o saco I e ambos os sacos têm o mesmo número total de bolas. Quando se comparou o número de bolas de cada cor em cada saco, os alunos observaram que no saco I há mais bolas pretas do que brancas e no saco II há mais bolas brancas do pretas. Este raciocínio, referido pelos alunos de ambos os anos com percentagens semelhantes, conduziu à selecção da resposta correcta.

O raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, consistindo na comparação das probabilidades dos acontecimentos, levou os alunos a escolherem a resposta correcta. Neste caso, verificou-se que o raciocínio quase não foi referido pelos alunos do 8º ano, mas foi mencionado por uma percentagem considerável de alunos do 11º ano.

Finalmente, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* explicitou-se pelo facto de ser possível obter uma bola branca de qualquer um dos sacos, pois ambos têm bolas brancas, ou da impossibilidade de prever o resultado numa única extracção. Este raciocínio foi referido para justificar a equiprobabilidade dos dois acontecimentos, o que aconteceu com poucos alunos do 8º ano e com apenas um do 11º ano.

Observando os raciocínios apresentados pelos alunos do 8º ano e do 11º ano, conclui-se que são semelhantes, situando-se as diferenças ao nível da frequência com que aderiram a tais raciocínios. Tendencialmente, os alunos dos 11º ano apresentaram mais frequentemente raciocínios com um maior domínio de validade. A este propósito, deve observar-se que os raciocínios *Comparar o número de bolas brancas e pretas* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* são mais gerais do que o raciocínio *Comparar o número de bolas brancas*. Este último raciocínio, baseado na comparação do número de bolas de apenas uma das cores, é válido no contexto deste problema porque ambos os sacos têm o mesmo número total de bolas.

No caso dos alunos do 11º ano *cep* e *sep*, verificou-se que os alunos *cep* aderiram menos frequentemente ao raciocínio *Comparar o número de bolas brancas* e mais frequentemente ao raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*.

Questão 5. Um saco I contém duas bolas brancas e duas bolas pretas, e um saco II contém duas bolas brancas e três bolas pretas. <u>Sem ver</u>, tira-se <u>uma</u> bola de cada um dos sacos.

Saco I: ○○●● **Saco II**: ○○●●●

De qual dos sacos é <u>mais provável</u> obter uma bola branca?

☐ Do saco I.

☐ Do saco II.

☐ É igualmente provável obter uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

<u>Respostas</u>. Nesta questão, comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter uma bola branca do saco I* e *Obter uma bola branca do saco II* na experiência de extracção de uma bola de cada saco, considerando que é igual o número de bolas brancas em ambos os sacos.

Observando os resultados obtidos, que constam da Tabela 8, verifica-se que a maioria dos alunos de cada um dos anos escolheu a resposta correcta ao afirmar que era mais provável *Obter uma bola branca dos saco I*, tendo sido seleccionada por uma percentagem consideravelmente maior de alunos do 11º ano. A relação das percentagens de respostas é invertida entre os grupos quando se considera que é igualmente provável obter uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

Tabela 8. Percentagem de alunos nas respostas da questão 5 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RESPOSTAS	8º ANO (n=204)	11º ANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
Obter uma bola branca do saco I.*	57.8	89.5	90.4	89.9
Obter uma bola branca do saco II.	1.5	1.0	1.0	1.0
É igualmente provável.	40.7	9.5	8.6	9.1

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Finalmente, a percentagem de alunos de ambos os anos que consideraram ser mais provável *Obter uma bola branca do saco II* é irrelevante.

Em relação aos alunos do 11º ano *cep* e *sep*, observaram-se percentagens semelhantes nas várias respostas.

Comparativamente com os resultados obtidos na questão 4, os resultados obtidos nesta questão permitem concluir que os alunos em ambos os anos escolheram menos frequentemente a resposta correcta. Além disso, os alunos do 8º ano mostraram uma dificuldade consideravelmente maior em seleccionar a resposta correcta relativamente aos alunos do 11º ano.

<u>Raciocínios</u>. Comparativamente com a questão anterior, os alunos referiram mais dois novos raciocínios nesta questão: *Comparar o número total de bolas* e *Comparar o número de bolas pretas*, conforme se pode verificar na Tabela 9.

No raciocínio *Comparar o número total de bolas*, referido com percentagens semelhantes em ambos os anos, os alunos observaram que o saco I tem menos bolas do que o saco II. Desta constatação, os alunos concluíram que é mais provável obter uma bola branca do saco I, que é a resposta correcta.

Tabela 9. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 5 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RACIOCÍNIOS	8ºANO (n=204)	11ºANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
Comparar o número total de bolas.	3.0	1.9	5.8	3.8
Comparar o número de bolas pretas.	18.1	4.8	15.4	10.1
Comparar o número de bolas brancas.	35.8	9.5	8.6	9.1
Comparar o número de bolas brancas e pretas.	35.3	42.9	46.2	44.5
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	0.0	37.1	19.2	28.2
Ambos os acontecimentos são possíveis.	3.4	0.0	0.0	0.0
Outros.	4.4	3.8	4.8	4.3

O raciocínio *Comparar o número de bolas pretas*, referido com uma percentagem maior no 8º ano, consistiu em observar que o saco II tem mais bolas pretas do que o saco I. Tal como no raciocínio anterior, a adesão a este raciocínio levou os alunos a afirmarem a maior probabilidade de obter uma bola branca do saco I.

Já no caso do raciocínio *Comparar o número de bolas brancas*, mais mencionado no 8º ano, os alunos afirmaram a equiprobabilidade dos dois acontecimentos a partir da observação do igual número de bolas brancas nos dois sacos.

Quanto ao raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas*, referido mais frequentemente no 11º ano, verificou-se que os alunos estabeleceram comparações entre os dois sacos e em cada um dos sacos, tendo conduzido à escolha da resposta correcta.

Como o raciocínio anterior, também o raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, referido apenas por alunos do 11º ano, conduziu à escolha da resposta correcta.

Finalmente, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis*, adoptado apenas por alunos do 8º ano, conduziu à afirmação da equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

Comparando os raciocínios dos dois anos escolares, destaca-se que os alunos do 11º ano aderiram menos frequentemente aos raciocínios *Comparar o número de bolas pretas* e *Comparar o número de bolas brancas*. Observe-se que o primeiro raciocínio, embora tenha conduzido a respostas correctas, apresenta um campo de validade mais restrito, pois apenas se pode aplicar ao caso em que é igual o número de bolas brancas em ambos os sacos. No caso do segundo raciocínio, ele conduziu a respostas erradas.

Em relação ao raciocínio *Comparar o número total de bolas*, ele foi referido por muito poucos alunos de ambos os anos e, naturalmente, não garante a escolha da resposta correcta. Diferentemente, ainda em relação à resposta correcta, verificou-se que apenas alunos do 11º ano referiram o raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* e mais frequentemente adoptaram o raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas*.

Entre os alunos do 11º ano *cep* e *sep*, realça-se a menor adesão dos alunos *cep* ao raciocínio *Comparar o número de bolas pretas* e a maior adesão ao raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*.

Tal como se afirmou na questão 4, o raciocínio baseado na comparação do número de bolas de uma das cores é um raciocínio com um domínio de validade restrito. Esse facto foi confirmado na questão 5, na medida em que a menor percentagem de respostas correctas se deve, fundamentalmente, à utilização deste raciocínio. Concretamente, a equiprobabilidade dos dois acontecimentos foi justificada pela existência de igual número de bolas brancas em ambos os sacos, o que aconteceu muito mais frequentemente entre os alunos do 8º ano do que entre os alunos do 11º ano. Já no caso em que os alunos se centraram apenas na comparação do número de bolas pretas nos dois sacos, verificou-se que, em geral, os alunos escolheram a resposta correcta. Neste caso, uma tal comparação conduziu a respostas correctas porque ambos os sacos têm o mesmo número de bolas brancas. Constatámos, assim, que, comparativamente com a questão 4, a maior dificuldade sentida pelos alunos na questão 5 deveu-se ao facto de não ter sido suficiente comparar apenas o número de bolas brancas em ambos os sacos.

Questão 6. Um saco I contém duas bolas brancas e uma bola preta, e um saco II contém três bolas brancas e duas bolas pretas. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos.

Saco I: ○○●   **Saco II**: ○○○●●

De qual dos sacos é mais provável obter uma bola branca?

☐ Do saco I.

☐ Do saco II.

☐ É igualmente provável obter uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

Respostas. Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter uma bola branca do saco I* e *Obter uma bola branca do saco II* na experiência de extracção de uma bola de cada saco, considerando que é diferente o número e a razão entre o número de bolas de cada cor em cada um dos sacos.

Os resultados obtidos nesta questão, que constam da Tabela 10, revelam que a maior probabilidade de *Obter uma bola branca do saco I*, que é a resposta correcta, foi escolhida mais frequentemente pelos alunos do 11º ano. No caso da maior probabilidade de *Obter uma bola branca do saco II*, observou-se que os alunos do 8º ano escolheram-na mais frequentemente. Finalmente, a equiprobabilidade de obter uma bola branca de qualquer dos sacos I e II foi escolhida por percentagens semelhantes de alunos em ambos os anos.

Tabela 10. Percentagem de alunos nas respostas da questão 6 por ano escolar e ensino de probabilidades.

	8º ANO (n=204)	11º ANO (n=209)		
RESPOSTAS		*cep*	*sep*	Total
Obter uma bola branca do saco I.*	26.9	48.6	47.1	47.8
Obter uma bola branca do saco II.	31.4	9.5	8.7	9.1
É igualmente provável.	41.7	41.9	44.2	43.1

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Assim, as maiores diferenças entre os dois grupos de alunos verificaram-se na resposta correcta, que foi mais escolhida entre os alunos do 11º ano, e na maior probabilidade de obter uma bola branca do saco II, que foi mais escolhida entre os alunos do 8º ano.

No caso dos alunos do 11º ano *cep* e *sep*, obtiveram-se em ambos os grupos percentagens semelhantes na selecção das várias respostas.

Raciocínios. À excepção do raciocínio *Proporção do número de bolas*, todos os outros raciocínios referidos nesta questão já foram mencionados nas questões anteriores, como se pode observar na Tabela 11.

Tabela 11. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 6 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RACIOCÍNIOS	8ºANO (n=204)	11ºANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
Comparar o número total de bolas.	6.9	3.8	6.7	5.3
Comparar o número de bolas pretas.	11.8	2.8	9.6	6.2
Comparar o número de bolas brancas.	30.9	6.7	8.7	7.7
Comparar o número de bolas brancas e pretas.	35.8	30.5	32.7	31.6
Proporção do número de bolas.	3.9	1.9	6.7	4.3
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	0.0	34.3	16.4	25.3
Ambos os acontecimentos são possíveis.	2.9	0.0	0.0	0.0
Outros.	7.8	20.0	19.2	19.6

O raciocínio *Comparar o número total de bolas*, adoptado com percentagens semelhantes em ambos os anos, levou os alunos a afirmarem a maior probabilidade de obter uma bola branca do saco I, pelo facto de neste saco haver o menor número total de bolas.

Também o raciocínio *Comparar o número de bolas pretas*, referido mais frequentemente no 8º ano, conduziu os alunos a afirmarem a maior probabilidade de obter uma bola branca do saco I, com base na observação de que o saco II tem mais bolas pretas do que o saco I.

Já o raciocínio *Comparar o número de bolas brancas*, muito mais referido entre os alunos do 8º ano, foi usado para justificar a maior probabilidade de obter uma bola branca do saco II, pois este saco tem mais bolas brancas do que o saco I.

O raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas* foi o mais referido pelos alunos de ambos os anos, com percentagens semelhantes, para justificar a equiprobabilidade dos dois acontecimentos. Neste caso, nas comparações entre os dois sacos, alguns alunos observaram que o saco II tem mais uma bola de cada cor em relação ao saco I e, nas comparações em cada um dos sacos, alguns alunos observaram que ambos os sacos têm mais uma bola branca do que pretas.

O raciocínio *Proporção do número de bolas*, muito pouco referido pelos alunos de ambos os anos, consistiu em explicitar a proporção do número de bolas de cada cor em ambos os sacos e levou os alunos a escolherem a resposta correcta.

Também o raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, referido apenas por alunos do 11º ano, foi utilizado para justificar a resposta correcta.

Por fim, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* foi referido por muito poucos alunos do 8º ano para justificarem a equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

Comparando os raciocínios nos dois anos escolares, destaca-se que apenas os alunos do 11º ano exibiram o raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*. No caso do raciocínio *Comparar o número de bolas brancas*, que conduziu a respostas erradas, ele foi muito menos referido entre os alunos do 11º ano do que entre os alunos do 8º ano. Também o raciocínio *Comparar o número de bolas pretas* foi mais referido pelos alunos do 8º ano, agora, para justificarem a resposta correcta.

Entre os alunos do 11º ano *cep* e *sep*, verificou-se que os alunos com ensino de probabilidades exibiram mais frequentemente o raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, que, tal como o raciocínio *Proporção do número de bolas*, é um raciocínio fiável para responder correctamente à questão.

Contrariamente às questões 4 e 5, nesta questão um raciocínio resultante da comparação do número de bolas de uma só cor não garante que o aluno escolha a resposta correcta. O facto do raciocínio *Comparar o número de bolas pretas* ter conduzido à selecção da resposta correcta, mais frequentemente entre os alunos do 8º ano, não implica que se trate de um raciocínio seguro. Além do raciocínio *Comparar o número de bolas brancas*, também contribuiu para responder erradamente à questão a adesão ao raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas*, em ambos os anos escolares. Assim, nesta questão a situação foi mesmo mais problemática, pois nem a comparação do número de bolas de uma das cores nem de ambas as cores garante, em geral, a escolha da resposta correcta.

Questão 7. Um saco I contém uma bola branca e uma bola preta, e um saco II contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos.

Saco I: ○● **Saco II**: ○○●●

De qual dos sacos é mais provável obter uma bola branca?

☐ Do saco I.

☐ Do saco II.

☐ É igualmente provável obter uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

Respostas. Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter uma bola branca do saco I* e *Obter uma bola branca do saco II* na experiência de extracção de uma bola de cada saco, considerando que é igual o número e a razão entre o número de bolas de cada cor em cada um dos sacos.

Observando a Tabela 12, verifica-se que a maioria dos alunos de ambos os anos escolheram a resposta correcta ao afirmarem que era igualmente provável obter uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

Tabela 12. Percentagem de alunos nas respostas da questão 7 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RESPOSTAS	8º ANO (n=204)	11º ANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
Obter uma bola branca do saco I.	12.3	4.8	6.7	5.7
Obter uma bola branca do saco II.	23.5	1.9	9.6	5.7
É igualmente provável.*	64.2	93.3	83.7	88.6

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Em termos comparativos, verificou-se que os alunos do 11º ano escolheram mais frequentemente a resposta correcta, e relativamente às duas respostas erradas escolheram-nas com menor frequência do que os alunos do 8º ano.

Em relação aos alunos do 11º ano *cep* e *sep*, verificou-se que os alunos *cep* escolheram mais frequentemente a resposta correcta e menos frequentemente qualquer das respostas não correctas.

Raciocínios. Os raciocínios referidos nesta questão, apresentados na Tabela 13, já foram todos mencionados nas questões anteriores.

Tabela 13. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 7 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RACIOCÍNIOS	8ºANO (n=204)	11ºANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
Comparar o número total de bolas.	11.8	3.8	4.8	4.3
Comparar o número de bolas brancas.	23.0	1.9	6.7	4.3
Comparar o número de bolas brancas e pretas.	46.6	20.0	24.1	22.0
Proporção do número de bolas.	0.0	11.4	22.1	16.7
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	3.4	54.3	32.7	43.6
Ambos os acontecimentos são possíveis.	3.9	0.0	0.0	0.0
Outros.	11.3	8.6	9.6	9.1

O raciocínio *Comparar o número total de bolas*, mais referido entre os alunos do 8º ano, foi usado para justificar a maior probabilidade de obter uma bola branca do saco I pelo facto de neste saco existir o menor número total de bolas.

Já o raciocínio *Comparar o número de bolas brancas*, referido por uma percentagem superior de alunos do 8º ano, levou os alunos a afirmarem a maior probabilidade de obter uma bola branca do saco II, pois este saco tem mais bolas brancas do que o saco I.

Quanto ao raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas*, referido por uma percentagem maior de alunos do 8º ano, verificou-se que os alunos afirmaram a equiprobabilidade dos dois acontecimentos. Nas comparações entre os dois sacos, alguns alunos observaram que o saco II tem mais uma bola de cada cor em relação ao saco I. Nas comparações em cada um dos sacos, os alunos observaram que é igual o número de bolas de cada cor em qualquer dos sacos.

No raciocínio *Proporção do número de bolas*, apenas referido por alunos do 11º ano, verificou-se que os alunos explicitaram a proporção do número de bolas de cada cor em ambos os sacos para justificarem a resposta correcta.

O raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, muito pouco referido pelos alunos do 8º ano em relação aos alunos do 11º ano, levou os alunos a seleccionarem a resposta correcta.

Por último, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis*, referido apenas por poucos alunos do 8º ano, foi usado para justificar a equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

Observando os raciocínios dos dois anos escolares, salienta-se que os alunos do 8º ano justificaram mais frequentemente a equiprobabilidade de obter uma bola branca de ambos os sacos a partir do raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas*, enquanto os alunos do 11º ano o fizeram na base do raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*. Observou-se, ainda, que alguns alunos do 11º ano justificaram também esta resposta a partir do raciocínio *Proporção do número de bolas*. Deve salientar-se que o facto de os alunos terem observado que o saco II tem mais uma bola de cada cor em relação ao saco I conduziu à resposta correcta porque o número de bolas de ambas as cores nos dois sacos é igual. Trata-se, no entanto, de um raciocínio de aplicação restrita, conforme foi verificado na questão 6. Nessa questão, recorde-se que este raciocínio conduziu à escolha de uma resposta errada.

No caso do raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis*, referido por alguns alunos do 8º ano, embora tenha conduzido à resposta correcta nesta questão, constitui um raciocínio muito vago em termos da avaliação da probabilidade de um acontecimento. Note-se que a adopção coerente de um tal raciocínio, perante acontecimentos não equiprováveis, conduz sempre à escolha de uma resposta errada.

Entre os alunos do 11º ano *cep* e *sep*, destaca-se que o raciocínio *Comparar o número de bolas brancas* foi referido por mais alunos *sep* para afirmaram a maior probabilidade de obter uma bola branca do saco II. No caso da afirmação da equiprobabilidade de obter uma bola branca de qualquer dos sacos, o raciocínio *Proporção do número de bolas* foi referido por mais alunos *sep* e o raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* foi referido por mais alunos *cep*.

Questão 8. Lança-se um dado e conta-se o número de pintas da face que fica virada para cima. Qual das situações seguintes é mais provável?

☐ Obter o número 5.

☐ Obter um número ímpar.

☐ As duas situações anteriores são igualmente prováveis.

Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

Respostas. Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter o número 5* e *Obter um número ímpar* na experiência de lançamento de um dado.

Da observação da Tabela 14, salienta-se que nenhum aluno do 11º ano afirmou a maior probabilidade de obter o número 5 e, no caso do 8º ano, foi afirmada por muito poucos alunos.

Tabela 14. Percentagem de alunos nas respostas da questão 8 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RESPOSTAS	8º ANO (n=204)	11º ANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
Obter o número 5.	2.0	0.0	0.0	0.0
Obter um número ímpar.*	37.2	82.9	70.2	76.6
É igualmente provável.	60.8	17.1	29.8	23.4

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

A maior probabilidade de obter um número ímpar, que constitui a resposta correcta, foi seleccionada pela maioria dos alunos do 11º ano. Já no caso dos alunos do 8º ano tal não se verificou, tendo-se obtido uma percentagem consideravelmente inferior.

Quanto à equiprobabilidade dos dois acontecimentos, verificou-se que ela foi afirmada pela maioria dos alunos 8º ano e obteve-se uma percentagem consideravelmente inferior entre os alunos do 11º ano.

Consequentemente, dos resultados obtidos salienta-se que a maioria dos alunos do 11º ano escolheram a resposta correcta e a maioria dos alunos do 8º ano afirmaram a equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

Entre os alunos do 11º ano *cep* e *sep*, destaca-se que os alunos *cep* escolheram mais frequentemente a resposta correcta e afirmaram menos frequentemente a equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

Raciocínios. Na Tabela 15 apresentam-se os raciocínios e as percentagens de alunos que a eles aderiram para explicarem as respostas escolhidas.

Tabela 15. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 8 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RACIOCÍNIOS	8ºANO (n=204)	11ºANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
O número 5 é um número ímpar.	10.3	5.7	4.8	5.3
Comparar o número de casos favoráveis.	35.8	52.4	51.0	51.6
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	0.0	27.6	16.3	22.0
Ambos os acontecimentos são possíveis.	42.6	11.4	20.2	15.8
Outros.	11.3	2.9	7.7	5.3

O raciocínio *O número 5 é um número ímpar*, que consistiu em observar que o número 5 é um número ímpar, foi referido por mais alunos do 8º ano para justificarem a equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

Já o raciocínio *Comparar o número de casos favoráveis*, que consistiu em comparar o número de ímpares com um, levou os alunos a afirmarem a maior probabilidade de obter um número ímpar e foi referido pela maioria dos alunos do 11º ano e por uma percentagem considerável de alunos do 8º ano.

Também o raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, adoptado apenas por alunos do 11º ano, foi referido para justificar a resposta correcta.

Finalmente, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* foi referido para justificar a equiprobabilidade dos dois acontecimentos pelo facto de ambos, ou mesmo outros, serem possíveis. A adesão a este raciocínio foi muito superior no 8º ano, onde foi o raciocínio mais mencionado.

Comparando os dois anos escolares, verifica-se que apenas os alunos do 11º ano recorreram ao raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* para justificar a maior probabilidade de obter um número ímpar. Quanto aos outros raciocínios, eles são do mesmo tipo em ambos os grupos e as percentagens com que foram referidos reflectem as percentagens das respostas a que estão associados.

Entre os alunos do 11º ano, evidencia-se o facto de mais alunos *cep* terem aderido ao raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* para justificarem a resposta correcta, e mais alunos *sep* terem referido o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* para justificarem a equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

Questão 9. Lança-se um dado e conta-se o número de pintas da face que fica virada para cima. Qual das situações seguintes é mais provável?

- ☐ Obter um número par.
- ☐ Obter um número ímpar.
- ☐ As duas situações anteriores são igualmente prováveis.

Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

Respostas. Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter um número par* e *Obter um número ímpar* na experiência de lançamento de um dado.

A partir dos resultados obtidos, que constam da Tabela 16, verifica-se que quase todos os alunos de ambos os anos escolheram a resposta correcta ao afirmarem que os dois acontecimentos são igualmente prováveis.

Tabela 16. Percentagem de alunos nas respostas da questão 9 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RESPOSTAS	8º ANO (n=204)	11º ANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
Obter um número par.	1.0	0.0	1.0	0.5
Obter um número ímpar.	1.0	0.0	0.0	0.0
É igualmente provável.*	98.0	100.0	99.0	99.5

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Relativamente aos acontecimentos *Obter um número par* e *Obter um número ímpar*, observou-se em ambos os anos que muito poucos alunos, ou mesmo nenhum, afirmaram ser mais provável qualquer destes acontecimentos. Assim, nesta questão, verificou-se que os alunos de ambos os anos escolheram as respostas possíveis com percentagens aproximadamente iguais.

Em relação aos alunos do 11º ano *cep* e *sep*, observaram-se percentagens semelhantes de alunos nas várias respostas.

Raciocínios. Os raciocínios referidos nesta questão, que constam da Tabela 17, já foram todos mencionados na questão anterior.

O raciocínio *Comparar o número de casos favoráveis*, que consistiu em comparar o número de pares com o número de ímpares, levou os alunos a afirmarem a equiprobabilidade dos dois acontecimentos e foi referido por uma maior percentagem de alunos do 11º ano.

Tabela 17. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 9 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RACIOCÍNIOS	8ºANO (n=204)	11ºANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
Comparar o número de casos favoráveis.	40.2	51.4	59.6	55.5
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	0.0	39.1	22.1	30.6
Ambos os acontecimentos são possíveis.	52.0	7.6	12.5	10.1
Outros.	7.8	1.9	5.8	3.8

Também o raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, referido apenas por alunos do 11º ano, levou os alunos a seleccionarem a resposta correcta.

Por fim, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* foi referido para justificar também a equiprobabilidade dos dois acontecimentos. Este raciocínio foi adoptado pela maioria dos alunos do 8º ano e por muito menos alunos do 11º ano.

Comparativamente, entre os alunos do 8º ano e do 11º ano, verificou-se que apenas alunos do 11º ano recorreram ao raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* para justificarem a equiprobabilidade dos acontecimentos. Diferentemente dos alunos do 11º ano, os alunos do 8º ano justificaram muito mais frequentemente a equiprobabilidade dos acontecimentos com base no raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis*, que claramente é um raciocínio que não garante a selecção da resposta correcta.

Entre os alunos do 11º ano, destaca-se a maior percentagem de alunos *cep* que referiram o raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* e a maior percentagem de alunos *sep* nos outros dois raciocínios.

Síntese dos resultados nas seis questões do subtema. Considerando as percentagens de respostas correctas por ano escolar em todas as seis questões estudadas, cuja representação gráfica pode ser observada na Figura 8, destaca-se que os alunos de ambos os anos apresentaram percentagens muito altas – entre 90% e 100% – nas questões 4 e 9 e apresentaram as percentagens mais baixas na questão 6.

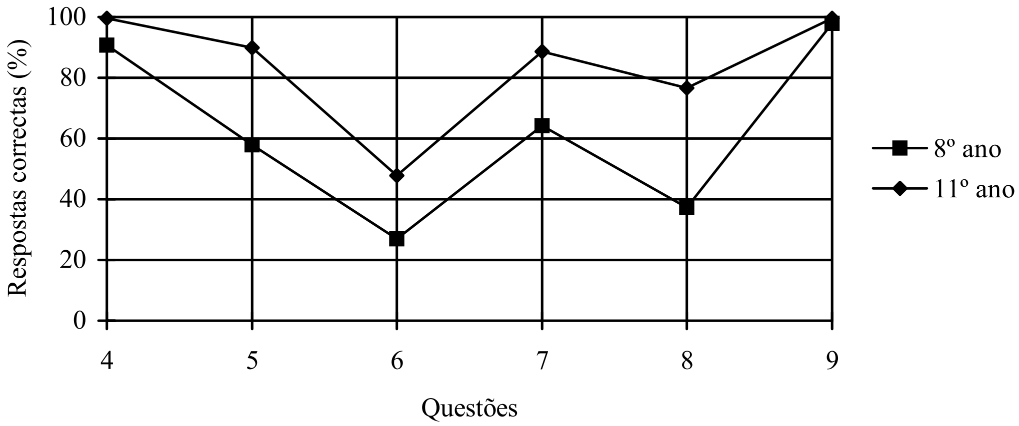


Figura 8. Percentagem de respostas correctas nas questões 4, 5, 6, 7, 8 e 9 por ano escolar.

Em relação à maior dificuldade revelada pelos alunos na questão 6, que se insere no contexto da extracção de uma bola de um saco, deve observar-se que em ambos os sacos é diferente o número e a razão entre o número de bolas de cada cor. Consequentemente, uma comparação baseada no número de bolas de uma das cores é claramente insuficiente para responder correctamente à questão, muito embora alguns alunos de ambos os anos tenham escolhido a resposta correcta a partir da comparação do número de bolas pretas. Esta explicação é corroborada pelo facto das dificuldades terem aumentado quando os alunos passaram da questão 4 para a questão 5 e da questão 5 para a questão 6, pois na questão 4 basta comparar o número de bolas de qualquer uma das cores e na questão 5 é suficiente comparar o número de bolas pretas.

Face à questão 6, as maiores percentagens de respostas correctas na questão 7 resultaram da comparação do número de bolas de ambas as cores, o que foi mais frequente entre os alunos do 8º ano. Para os alunos do 11º ano, verificou-se também que mais alunos compararam as probabilidades dos acontecimentos.

No caso das questões 8 e 9, que se inserem no contexto do lançamento de um dado, as maiores percentagens de respostas correctas obtidas na questão 9 resultaram fundamentalmente da afirmação da equiprobabilidade dos dois acontecimentos pelo facto de ambos serem possíveis. Repare-se que na questão 8 a adesão a este raciocínio conduziu a respostas erradas.

No caso dos alunos do 11º ano, como se pode verificar na Figura 9, os alunos *cep* e *sep* seleccionaram a resposta correcta com percentagens semelhantes nas seis questões.

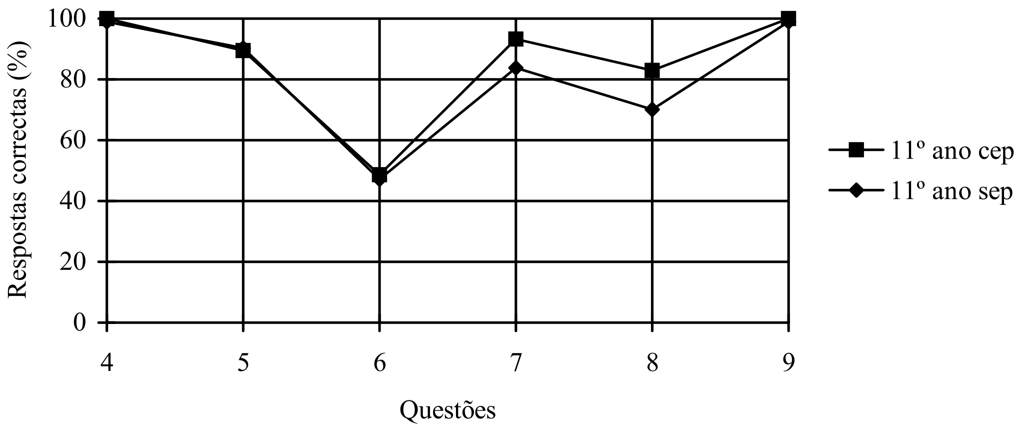


Figura 9. Percentagem de respostas correctas dos alunos do 11º ano nas questões 4, 5, 6, 7, 8 e 9 por ensino de probabilidades.

As ligeiras diferenças observadas aconteceram nas questões 7 e 8, onde os alunos *cep* escolheram a resposta correcta com uma percentagem um pouco superior.

Ao longo das seis questões, consideraram-se os raciocínios *Proporção do número de bolas*, *Comparar o número de casos favoráveis* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, enquanto raciocínios que garantem a escolha da resposta correcta. Estes raciocínios, designados por 'raciocínios gerais', foram sistematicamente muito mais referidos pelos alunos do 11º ano. Os alunos do 8º ano quase nunca referiram 'raciocínios gerais' nas questões 4, 5, 6 e 7, inseridas no contexto dos sacos, e uma percentagem considerável destes alunos compararam o número de casos favoráveis para justificar a resposta correcta, no contexto do dado.

No caso dos alunos do 11º ano, consideraram-se, conjuntamente, as percentagens de alunos *cep* e *sep* que adoptaram os 'raciocínios gerais' em cada uma das seis questões. Conforme se pode observar pela Figura 10, os alunos *cep* aderiram mais frequentemente a estes raciocínios em todas as questões.

Da observação da Figura 10, destaca-se, ainda, a baixa percentagem de alunos que referiram 'raciocínios gerais' para justificarem a selecção da resposta correcta nas questões 4, 5 e 6. Nestas questões, que se inserem no contexto dos sacos, muitos alunos justificaram a resposta correcta através de comparações centradas no número de bolas de uma das cores ou de ambas as cores.

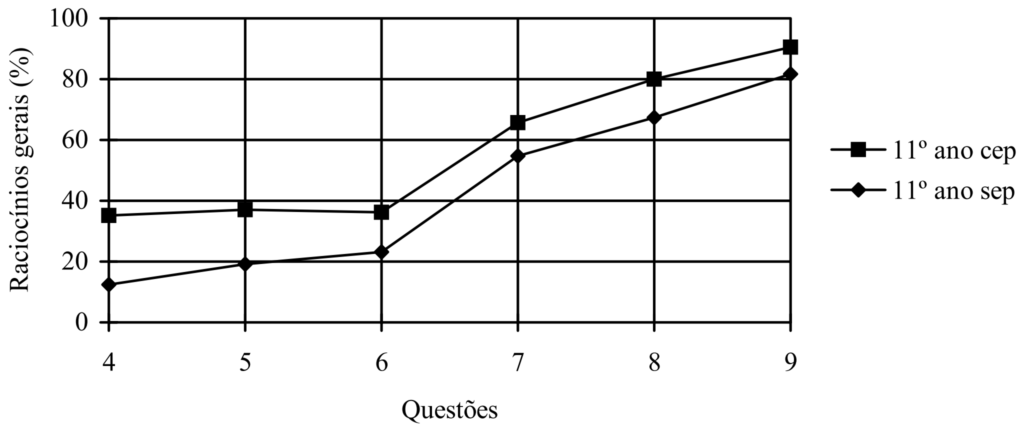


Figura 10. Percentagem de alunos do 11º ano nos 'raciocínios gerais' nas questões 4, 5, 6, 7, 8 e 9 por ensino de probabilidades.

Também no caso dos alunos do 8º ano, relativamente às questões 4, 5, 6 e 7, a resposta correcta foi quase sempre justificada através de comparações centradas no número de bolas de uma das cores ou de ambas as cores.

Finalmente, destaca-se que, especialmente no contexto do dado, mais alunos do 8º ano afirmaram a equiprobabilidade dos dois acontecimentos pelo facto de ambos serem possíveis. Em consequência, a possibilidade de realização dos dois acontecimentos foi referida para justificar a resposta correcta nos casos em que esta coincidia com a equiprobabilidade dos dois acontecimentos, o que aconteceu nas questões 7 e 9. Diferentemente do 8º ano, os alunos do 11º ano ou não se referiram a este raciocínio ou referiram-no numa percentagem muito inferior.

C. Probabilidade em experiências compostas

Neste tema incluem-se cinco questões: a questão 10, que se insere no contexto da extracção de duas bolas de um saco, as questões 11 e 12, que se inserem no contexto do lançamento de dois dados, e as questões 13 e 14, que se inserem no contexto do lançamento de duas e três moedas ao ar, respectivamente. Seguidamente, para cada questão, apresentam-se as percentagens de alunos nas diferentes respostas possíveis e nos raciocínios estabelecidos.

Questão 10. Um saco contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. Sem ver, tiram-se de uma só vez duas bolas do saco.

Saco: ○○●●

Qual das situações seguintes é mais provável?

☐ Obter duas bolas brancas.

☐ Obter uma bola branca e uma bola preta.

☐ As duas situações anteriores são igualmente prováveis.

Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

Respostas. Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter duas bolas brancas* e *Obter uma bola branca e uma bola preta* na experiência de extracção de duas bolas de um saco.

Observando os resultados obtidos, que constam da Tabela 18, verifica-se que muito poucos alunos de ambos os anos afirmaram ser mais provável *Obter uma bola branca e uma bola preta*, que é a resposta correcta.

Tabela 18. Percentagem de alunos nas respostas da questão 10 por ano escolar e ensino de probabilidades.

	8º ANO (n=204)	11º ANO (n=209)		
RESPOSTAS		*cep*	*sep*	Total
Obter duas bolas brancas.	0.0	0.0	0.0	0.0
Obter uma bola branca e uma bola preta*.	14.7	27.6	29.8	28.7
É igualmente provável.	85.3	72.4	70.2	71.3

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Em relação ao acontecimento *Obter duas bolas brancas*, verificou-se que nenhum aluno de ambos os anos o escolheu enquanto acontecimento mais provável.

Finalmente, a grande maioria dos alunos de ambos os anos afirmaram a equiprobabilidade de ambos os acontecimentos.

Assim, considerando as respostas dadas, conclui-se que esta questão se revelou difícil para ambos os anos escolares, e ainda mais difícil para os alunos do 8º ano.

No caso do 11º ano, observou-se que os alunos *cep* e *sep* seleccionaram as várias respostas possíveis com percentagens semelhantes.

<u>Raciocínios</u>. Na Tabela 19 estão registados os raciocínios e as percentagens de alunos que a eles aderiram para justificar as respostas escolhidas.

Tabela 19. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 10 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RACIOCÍNIOS	8ºANO (n=204)	11ºANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
É mais difícil obter duas bolas da mesma cor.	3.4	0.0	0.0	0.0
Comparar o número de casos favoráveis.	1.0	4.8	7.7	6.2
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	0.0	2.8	4.8	3.8
Comparar o número de bolas brancas e pretas.	55.4	48.6	54.8	51.7
Equiprobabilidade de obter bola branca e bola preta.	0.0	15.2	10.6	12.9
Equiprobabilidade de obter qualquer bola.	0.0	5.7	2.9	4.3
Equiprobabilidade dos elementos do espaço amostral.	0.0	1.9	0.9	1.4
Ambos os acontecimentos são possíveis.	31.9	8.6	15.4	12.0
Outros.	8.3	12.4	2.9	7.7

O raciocínio *É mais difícil obter duas bolas da mesma cor*, referido apenas no 8º ano, levou os alunos a responderem correctamente à questão pelo facto de ser mais difícil obter duas bolas da mesma cor.

A adesão ao raciocínio *Comparar o número de casos favoráveis* levou também os alunos a seleccionarem a resposta correcta. Neste raciocínio, pouco mencionado pelos alunos de ambos os anos, verificou-se que os alunos não indicaram o número exacto de casos favoráveis.

Também o raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* conduziu os alunos a escolherem a resposta correcta. Neste raciocínio, apenas referido no 11º ano, os alunos não indicaram os valores exactos das probabilidades.

O raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas* foi adoptado pela maioria dos alunos de ambos os anos. Observando que o número de bolas brancas é igual ao número de bolas pretas, os alunos afirmaram a equiprobabilidade dos dois acontecimentos (8º ano: 46.1%, 11º ano: 44.0%) ou a maior probabilidade de obter uma bola de cada cor (8º ano: 9.3%, 11º ano: 7.7%).

Analogamente, o raciocínio *Equiprobabilidade de obter bola branca e bola preta*, referido apenas no 11º ano, conduziu os alunos a afirmarem a equiprobabilidade dos dois acontecimentos (6.2%) ou a maior probabilidade de obter uma bola de cada cor (6.7%).

No raciocínio *Equiprobabilidade de obter qualquer bola* os alunos partiram da igual probabilidade de obter qualquer bola e, seguidamente, duplicaram essa probabilidade pelo facto de serem extraídas duas bolas. Coerentemente, este raciocínio, referido apenas por poucos alunos do 11º ano, foi usado para justificar a equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

O raciocínio *Equiprobabilidade dos elementos do espaço amostral* foi também referido apenas por poucos alunos do 11º ano. Neste caso, os alunos consideraram que se obtêm duas bolas brancas, duas bolas pretas ou uma bola branca e uma bola preta com igual probabilidade, o que conduziu à afirmação da equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

Finalmente, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis*, consistindo na possibilidade de realização dos dois acontecimentos, foi referido por alunos de ambos os anos para justificar a equiprobabilidade dos dois acontecimentos, e foi mais mencionado entre os alunos do 8º ano.

Em geral, nesta questão os alunos que referiram o raciocínio *Comparar o número de casos favoráveis*, não indicaram o número exacto de casos favoráveis. De modo semelhante, os alunos que referiram o raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, não indicaram os valores exactos das probabilidades. No caso do raciocínio *Equiprobabilidade de obter bola branca e bola preta*, evidencia-se a redução do cálculo de probabilidades em experiências compostas ao cálculo de probabilidades em experiências simples.

Interpretando o facto de um mesmo raciocínio estar na base de diferentes respostas como um atributo da inconsistência desse raciocínio, podemos concluir que os alunos nesta questão recorreram mais frequentemente a raciocínios menos coerentes para justificarem as suas respostas.

Comparativamente com os alunos do 8º ano, verificou-se que os alunos do 11º ano recorreram a uma maior variedade de raciocínios. Os raciocínios referidos apenas por alunos do 11º ano envolvem quase sempre o cálculo de probabilidades e, em alguns deles, evidencia-se o cálculo de probabilidades em experiências compostas a partir de probabilidades em experiências simples.

Entre os alunos do 11º ano *cep* e *sep*, verificou-se que recorreram essencialmente aos mesmos raciocínios e referiram-nos com percentagens semelhantes.

Questão 11. Lançam-se dois dados de uma só vez e conta-se o número de pintas das faces que ficam viradas para cima.
Qual das situações seguintes é mais provável?

☐ Obter o número 5 num dado e o número 6 no outro dado.
☐ Obter o número 6 em ambos os dados.
☐ As duas situações anteriores são igualmente prováveis.

Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

Respostas. Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter o número 5 num dado e o número 6 no outro dado* e *Obter o número 6 em ambos os dados* na experiência de lançamento de dois dados.

Os resultados obtidos, que constam da Tabela 20, revelam que a maior probabilidade do acontecimento *Obter o número 5 num dado e o número 6 no outro dado*, que é a resposta correcta, foi escolhida por uma pequena percentagem de alunos de ambos os anos. A grande maioria dos alunos de ambos os anos afirmou a equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

Em relação à maior probabilidade do acontecimento *Obter o número 6 em ambos os dados*, observou-se que muito poucos alunos em ambos os anos a seleccionaram.

Nesta questão, em termos de respostas, verificou-se que os alunos de ambos os anos escolheram-nas com percentagens semelhantes. No 11º ano, verificou-se que os alunos *cep* e os alunos *sep* seleccionaram as várias respostas também com percentagens semelhantes.

Tabela 20. Percentagem de alunos nas respostas da questão 11 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RESPOSTAS	8º ANO (n=204)	11º ANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
Obter o número 5 num dado e o 6 no outro*.	14.2	14.3	14.4	14.3
Obter o número 6 em ambos os dados.	2.0	0.0	1.0	0.5
É igualmente provável.	83.8	85.7	84.6	85.2

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Raciocínios. Observando a Tabela 21, conclui-se que, tal como na questão anterior, os alunos do 11º ano exibiram uma maior variedade de raciocínios para justificarem as suas respostas.

Os raciocínios *É mais difícil obter números iguais nos dois dados* e *É mais provável obter números diferentes nos dois dados*, raciocínios pouco referidos, levaram os alunos de ambos os anos a seleccionarem a resposta correcta.

Também os raciocínios *Comparar o número de casos favoráveis* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* conduziram à escolha da resposta correcta, embora nem sempre os alunos tenham indicado o número exacto de casos favoráveis ou os valores exactos das probabilidades. Ambos os raciocínios foram referidos por poucos alunos e o raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* não foi referido por nenhum aluno do 8º ano.

Não considerando a ordem dos resultados, os raciocínios *Os números 5 e 6 só existem uma vez em cada dado*, referido apenas por poucos alunos do 8º ano, e o raciocínio *Só há uma hipótese para o 5 e o 6 e uma para os dois 6*, referido apenas por poucos alunos do 11º ano, foram usados para justificar a equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

No raciocínio *Equiprobabilidade de obter qualquer face de um dado*, os alunos partiram da igual probabilidade de obter qualquer face de um dado. Seguidamente, alguns alunos concluíram de imediato que os acontecimentos são igualmente prováveis, enquanto outros operaram com essas probabilidades antes de concluírem a equiprobabilidade dos acontecimentos. Quanto ao raciocínio *Equiprobabilidade dos elementos do espaço amostral*, que também justificou a equiprobabilidade dos acontecimentos, destaca-se que os alunos consideraram um espaço amostral com 12 elementos.

Tabela 21. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 11 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RACIOCÍNIOS	8ºANO (n=204)	11ºANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
É mais difícil obter números iguais nos dois dados.	4.9	2.8	6.7	4.8
É mais provável obter números diferentes nos dois dados.	2.9	3.8	3.9	3.8
Comparar o número de casos favoráveis.	1.5	4.8	1.9	3.3
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	0.0	1.9	0.0	1.0
Os números 5 e 6 só existem uma vez em cada dado.	2.0	0.0	0.0	0.0
Só há uma hipótese para o 5 e o 6 e uma para os dois 6.	0.0	0.9	1.0	1.0
Equiprobabilidade de obter qualquer face de um dado.	0.0	36.2	27.9	32.1
Equiprobabilidade dos elementos do espaço amostral.	0.0	4.8	1.9	3.3
Os números dos dois dados são iguais.	12.7	6.7	9.6	8.1
Razões causais.	1.0	1.9	0.0	1.0
Ambos os acontecimentos são possíveis.	59.8	24.8	24.0	24.4
Outros.	15.2	11.4	23.1	17.2

A adesão ao raciocínio *Razões causais* para responder à questão foi muito pouco referido pelos alunos de ambos os anos. É no entanto de mencionar que, a partir deste raciocínio, os alunos do 8º ano afirmaram a maior probabilidade de obter o número 5 num dado e o número 6 no outro, enquanto os alunos do 11º ano afirmaram a equiprobabilidade dos acontecimentos.

Por fim, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* foi muito mais referido no 8º ano para justificar a equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

Entre os dois anos escolares, destaca-se que, quer os alunos do 8º ano, quer os alunos do 11º ano, escolheram a resposta correcta a partir essencialmente dos mesmos raciocínios. A única diferença verificou-se no raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, que foi apenas referido por alunos do 11º ano. Em relação à equiprobabilidade dos dois acontecimentos, é notória uma maior variedade de raciocínios dos alunos do 11º ano relativamente aos do 8º ano. Além disso, houve alunos do 11º ano, embora em pequeno número, que recorreram a raciocínios baseados no cálculo de probabilidades para justificarem as suas respostas.

Em relação aos alunos do 11º ano *cep* e *sep*, verificou-se que utilizaram fundamentalmente os mesmos raciocínios, observando-se apenas pequenas discrepâncias nas percentagens com que os referiram.

Questão 12. Lançam-se dois dados de uma só vez e conta-se o número de pintas das faces que ficam viradas para cima.
Qual das situações seguintes é mais provável?

- ☐ Obter números diferentes em cada um dos dados.
- ☐ Obter números iguais em ambos os dados.
- ☐ As duas situações anteriores são igualmente prováveis.

Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

Respostas. Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter números diferentes em cada um dos dados* e *Obter números iguais em ambos os dados* na experiência de lançamento de dois dados.

Os resultados obtidos, que constam da Tabela 22, revelam que a maioria dos alunos do 11º ano afirmaram ser mais provável *Obter números diferentes em cada um dos dados*, que é a resposta correcta. Já no caso do 8º ano, observou-se uma percentagem de alunos consideravelmente inferior a escolheram esta resposta.

Tabela 22. Percentagem de alunos nas respostas da questão 12 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RESPOSTAS	8º ANO (n=204)	11º ANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
Obter números diferentes em cada um dos dados*.	37.7	61.0	67.3	64.1
Obter números iguais em ambos os dados.	0.5	0.0	0.0	0.0
É igualmente provável.	61.8	39.0	32.7	35.9

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Em relação à equiprobabilidade de ambos os acontecimentos, observou-se uma tendência inversa. Agora, a maioria dos alunos do 8º ano seleccionaram esta resposta.

Finalmente, a maior probabilidade de *Obter números iguais em ambos os dados* foi escolhida apenas por um aluno do 8º ano.

Assim, em síntese, salienta-se que a maioria dos alunos do 11º ano escolheram a resposta correcta, e, sensivelmente na mesma percentagem, a maioria dos alunos do 8º ano afirmou a equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

No caso do 11º ano, observaram-se apenas ligeiras diferenças nas percentagens com que os alunos *cep* e *sep* escolheram as diferentes respostas.

Raciocínios. Conforme se pode verificar na Tabela 23, à excepção do raciocínio *Os números de um dado são diferentes*, todos os outros raciocínios foram já referidos na questão anterior.

Os raciocínios *É mais difícil obter números iguais nos dois dados*, referido mais frequentemente no 8º ano, e *Os números de um dado são diferentes*, referido apenas por poucos alunos do 8º ano, levaram os alunos a seleccionarem a resposta correcta.

Tabela 23. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 12 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RACIOCÍNIOS	8ºANO (n=204)	11ºANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
É mais difícil obter números iguais nos dois dados.	14.7	4.8	8.7	6.7
Os números de um dado são diferentes.	2.4	0.0	0.0	0.0
Comparar o número de casos favoráveis.	11.8	36.2	36.5	36.3
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	0.0	10.5	6.7	8.6
Equiprobabilidade de obter qualquer face de um dado.	0.0	7.6	5.8	6.7
Os números dos dois dados são iguais.	12.7	9.5	9.6	9.6
Razões causais.	0.5	1.9	0.0	1.0
Ambos os acontecimentos são possíveis.	42.7	7.6	9.6	8.6
Outros.	15.2	21.9	23.1	22.5

Também os raciocínios *Comparar o número de casos favoráveis*, muito mais frequentemente referido no 11º ano, e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, referido apenas no 11º ano, conduziram à selecção da resposta correcta. Tal como na questão anterior, verificou-se que nem sempre os alunos indicaram o número exacto de casos favoráveis ou os valores exactos das probabilidades, especialmente entre os alunos do 8º ano.

Em geral, o raciocínio *Equiprobabilidade de obter qualquer face de um dado*, referido apenas no 11º ano, levou os alunos a afirmarem a equiprobabilidade dos acontecimentos a partir da equiprobabilidade das faces de um dado.

Os raciocínios *Os números dos dois dados são iguais* e *Razões causais*, este último adoptado por muito poucos alunos de ambos os anos, foram referidos para justificar a equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

Por último, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* foi muito mais referido pelos alunos do 8º ano para justificar a igual probabilidade dos dois acontecimentos.

Entre os alunos do 8º ano e do 11º ano, verificou-se que apenas os alunos do 11º ano utilizaram o raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* para seleccionar a resposta correcta. Para além da utilização deste raciocínio, a maior percentagem de alunos do 11º ano que responderam correctamente a esta questão deveu-se à maior frequência com que recorreram ao raciocínio *Comparar o número de casos favoráveis*. Relativamente à equiprobabilidade de ambos os acontecimentos, salienta-se que apenas os alunos do 11º ano usaram o raciocínio *Equiprobabilidade de obter qualquer face de um dado* e o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* foi referido por muitos mais alunos do 8º ano.

Em relação aos alunos do 11º ano *cep* e *sep*, verificou-se que utilizaram fundamentalmente os mesmos raciocínios, observando-se apenas pequenas discrepâncias nas percentagens com que os referiram.

Questão 13. Lançam-se duas moedas ao ar de uma só vez e registam-se as faces que ficam viradas para cima.

Qual das situações seguintes é mais provável?

- ☐ Obter a face cara em ambas as moedas.
- ☐ Obter a face cara numa moeda e face escudo na outra moeda.
- ☐ As duas situações anteriores são igualmente prováveis.

Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

Respostas. Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter a face cara em ambas as moedas* e *Obter a face cara numa moeda e a face escudo na outra moeda* na experiência de lançamento de duas moedas ao ar.

Pelos resultados obtidos, que constam da Tabela 24, observa-se que a grande maioria dos alunos de ambos os anos afirmaram a equiprobabilidade dos acontecimentos.

Tabela 24. Percentagem de alunos nas respostas da questão 13 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RESPOSTAS	8º ANO (n=204)	11º ANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
Obter cara em ambas as moedas.	2.9	1.0	0.0	0.5
Obter cara numa moeda e escudo na outra*.	12.8	17.1	20.2	18.6
É igualmente provável.	84.3	81.9	79.8	80.9

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

A maior probabilidade do acontecimento *Obter a face cara numa moeda e a face escudo na outra moeda*, que é a resposta correcta, foi afirmada por relativamente poucos alunos em ambos anos.

Em relação à maior probabilidade do acontecimento *Obter a face cara em ambas as moedas*, destaca-se que muito poucos alunos dos dois anos a escolheram.

Em conclusão, verificou-se que cada uma das respostas foi escolhida por uma percentagem de alunos do 8º ano e do 11º ano aproximadamente igual.

Também, no caso do 11º ano, os alunos *cep* e *sep* seleccionaram as várias respostas com percentagens semelhantes.

Raciocínios. Os raciocínios referidos para justificar as respostas e as percentagens de alunos que a eles aderiram podem ser observados na Tabela 25.

Os raciocínios *É mais difícil obter faces iguais nas duas moedas* e *É mais provável obter faces diferentes nas duas moedas* foram referidos por poucos alunos de ambos os anos para justificarem a resposta correcta.

Também os raciocínios *Comparar o número de casos favoráveis* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* foram referidos para justificarem a resposta correcta, agora apenas entre os alunos do 11º ano.

O raciocínio *Cada moeda tem uma face cara e uma face escudo* foi referido por mais alunos do 11º ano para justificarem a equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

Tabela 25. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 13 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RACIOCÍNIOS	8ºANO (n=204)	11ºANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
É mais difícil obter faces iguais nas duas moedas.	3.9	0.9	2.9	1.9
É mais provável obter faces diferentes nas duas moedas.	2.9	3.8	2.9	3.3
Comparar o número de casos favoráveis.	0.0	3.8	0.9	2.4
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	0.0	5.7	5.8	5.8
Cada moeda tem uma face cara e uma face escudo.	1.5	14.3	7.7	11.0
Equiprobabilidade de obter qualquer face de uma moeda.	0.0	18.1	26.0	22.0
Equiprobabilidade dos elementos do espaço amostral.	0.0	4.8	1.9	3.3
Razões causais.	4.5	0.0	0.0	0.0
Ambos os acontecimentos são possíveis.	69.1	21.9	27.9	24.9
Outros.	18.1	26.7	24.0	25.4

No caso do raciocínio *Equiprobabilidade de obter qualquer face de uma moeda*, referido apenas no 11º ano, alguns alunos concluíram imediatamente que os acontecimentos são equiprováveis a partir da equiprobabilidade das faces de uma moeda, enquanto outros operaram previamente sobre as probabilidades das faces das moedas. Em relação ao raciocínio *Equiprobabilidade dos elementos do espaço amostral*, destaca-se a definição de um espaço amostral constituído por três elementos: cara e cara, escudo e escudo, cara e escudo. A consideração da equiprobabilidade destes resultados levou os alunos do 11º ano, que a ele aderiram, a afirmarem a equiprobabilidade dos acontecimentos.

O raciocínio *Razões causais* foi referido apenas por alunos do 8º ano para justificar a maior probabilidade de obter a face cara em ambas as moedas e a equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

Finalmente, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis*, referido muito mais frequentemente entre os alunos do 8º ano, foi usado para justificar a igual probabilidade dos dois acontecimentos.

Entre os alunos do 8º ano e do 11º ano, verificou-se que apenas alunos do 11º ano recorreram aos raciocínios *Comparar o número de casos favoráveis* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* para justificarem a resposta correcta. Em contrapartida, os alunos do 8º ano referiram-se mais ao raciocínio *É mais difícil obter faces iguais nas duas moedas*, que, em geral, é um raciocínio pouco fiável.

No caso da equiprobabilidade de ambos os acontecimentos, observou-se que os alunos do 11º ano apresentaram uma maior variedade de raciocínios para justificarem essa resposta. Em termos de percentagens de adesão, destacam-se os raciocínios *Ambos os acontecimentos são possíveis*, *Equiprobabilidade de obter qualquer face de uma moeda* e *Cada moeda tem uma face cara e uma face escudo*.

Relativamente aos alunos do 11º ano *cep* e *sep*, verificou-se que utilizaram os mesmos raciocínios, embora tenham aderido a esses raciocínios com frequências ligeiramente diferentes.

Questão 14. Lançam-se <u>três</u> moedas ao ar de uma só vez e registam-se as faces que ficam viradas para cima.
Qual das situações seguintes é <u>mais provável</u>?

- ☐ Obter faces iguais em todas as três moedas.
- ☐ Obter faces diferentes em duas das três moedas.
- ☐ As duas situações anteriores são igualmente prováveis.

Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

<u>Respostas</u>. Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter faces iguais em todas as três moedas* e *Obter faces diferentes em duas das três moedas* na experiência de lançamento de três moedas ao ar.

Observando os resultados obtidos, que constam da Tabela 26, verifica-se que a maior probabilidade do acontecimento *Obter faces iguais em todas as três moedas* foi afirmada por muito poucos alunos de ambos os anos.

Quanto à maior probabilidade do acontecimento *Obter faces diferentes em duas das três moedas*, que é a resposta correcta, observou-se que foi indicada pela maioria dos alunos do 11º ano. Já no caso dos alunos do 8º ano, registou-se uma considerável diminuição da percentagem de alunos que a seleccionaram.

Tabela 26. Percentagem de alunos nas respostas da questão 14 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RESPOSTAS	8º ANO (n=204)	11º ANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
Obter faces iguais nas três moedas.	2.0	1.9	0.0	1.0
Obter faces diferentes em duas das três moedas*.	33.8	46.7	60.6	53.6
É igualmente provável.	64.2	51.4	39.4	45.4

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Em relação à equiprobabilidade de ambos os acontecimentos, a situação é diversa. Agora, a maioria dos alunos do 8º ano escolheram esta resposta.

Em conclusão, entre os alunos do 8º ano e do 11º ano, observou-se que a maioria dos alunos do 8º ano afirmaram a equiprobabilidade de ambos os acontecimentos e, diferentemente, a maioria dos alunos do 11º ano escolheram a resposta correcta.

No 11º ano, salienta-se o facto de os alunos *sep* terem seleccionado mais frequentemente a resposta correcta e os alunos *cep* terem afirmado mais frequentemente a equiprobabilidade dos acontecimentos.

<u>Raciocínios</u>. Observando a Tabela 27, conclui-se que, à excepção dos raciocínios *É mais difícil obter faces iguais nas três moedas* e *Em duas das três moedas obtém-se a mesma face*, todos os outros raciocínios já foram referidos na questão anterior.

Os raciocínios É mais difícil obter faces iguais nas três moedas e Em duas das três moedas obtém-se a mesma face foram referidos por alunos de ambos os anos para justificarem a resposta correcta. No raciocínio Em duas das três moedas obtém-se a mesma face, a observação da impossibilidade de obter faces diferentes nas três moedas levou os alunos a afirmarem a maior probabilidade de obter faces diferentes em duas das três moedas.

Também os raciocínios *Comparar o número de casos favoráveis*, referido por mais alunos do 11º ano, e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, referido apenas por alunos do 11º ano, levaram os alunos a seleccionarem a resposta correcta. A adesão a estes raciocínios, como aconteceu em questões anteriores, não implicou sempre a definição do número exacto de casos favoráveis nem a indicação dos valores exactos das probabilidades dos acontecimentos.

Tabela 27. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 14 por ano escolar e ensino de probabilidades.

RACIOCÍNIOS	8ºANO (n=204)	11ºANO (n=209)		
		cep	*sep*	Total
É mais difícil obter faces iguais nas três moedas.	14.2	8.6	16.3	12.4
Em duas das três moedas obtém-se a mesma face.	3.9	3.8	10.6	7.2
Comparar o número de casos favoráveis.	2.0	12.4	7.7	10.0
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	0.0	6.7	4.8	5.7
Cada moeda tem uma face cara e uma face escudo.	2.9	11.4	5.8	8.6
Equiprobabilidade de obter qualquer face de uma moeda.	0.0	10.5	13.5	12.0
Equiprobabilidade dos elementos do espaço amostral.	0.0	3.8	1.0	2.4
Razões causais.	3.0	0.0	0.0	0.0
Ambos os acontecimentos são possíveis.	55.4	13.3	14.4	13.9
Outros.	18.6	29.5	25.9	27.8

Tal como na questão anterior, o raciocínio *Cada moeda tem uma face cara e uma face escudo* foi referido mais frequentemente entre os alunos do 11º ano para justificarem a equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

Em relação ao raciocínio *Equiprobabilidade de obter qualquer face de uma moeda*, tal como aconteceu em questões anteriores, observou-se que alguns alunos estabeleceram imediatamente a equiprobabilidade dos acontecimentos a partir da equiprobabilidade das faces de uma moeda, enquanto outros operaram previamente com a probabilidade das faces das moedas. No raciocínio *Equiprobabilidade dos elementos do espaço amostral*, salienta-se a definição de um espaço amostral constituído por quatro elementos: três faces cara, três faces escudo, uma face cara e duas faces escudo, uma face escudo e duas faces cara. O reconhecimento da equiprobabilidade destes resultados levou os alunos do 11º ano, que a ele aderiram, a afirmarem a equiprobabilidade dos acontecimentos.

O raciocínio *Razões causais*, adoptado apenas por alunos do 8º ano, foi referido para justificar cada uma das respostas possíveis.

Por último, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* foi referido para justificar a igual probabilidade dos dois acontecimentos. Este raciocínio foi adoptado muito mais frequentemente entre os alunos do 8º ano, tendo sido referido pela maioria destes alunos.

Entre os alunos do 8º ano e do 11º ano, destaca-se que apenas alunos do 11º ano recorreram ao raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* para justificarem a resposta correcta. No caso da equiprobabilidade de ambos os acontecimentos, verificou-se que os alunos do 8º ano basearam as suas respostas fundamentalmente no raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis*, enquanto que os alunos 11º ano basearam as suas respostas num leque mais variado de raciocínios. De entre estes, os raciocínios *Equiprobabilidade de obter qualquer face de uma moeda* e *Equiprobabilidade dos elementos do espaço amostral* foram referidos apenas por alunos do 11º ano.

Em relação aos alunos do 11º ano *cep* e *sep*, verificou-se que utilizaram os mesmos raciocínios, embora com frequências ligeiramente diferentes.

Síntese dos resultados nas cinco questões do subtema. Considerando as percentagens de respostas correctas nas cinco questões que se inserem no tema ‘Probabilidade em experiências compostas’, cuja representação gráfica pode ser observada na Figura 11, verifica-se que, em geral, os alunos de ambos os anos apresentaram muitas mais dificuldades em escolher a resposta correcta, comparativamente com as questões que se inserem no tema ‘Probabilidade em experiências simples’.

Da observação da Figura 11, destaca-se ainda que nas questões 12 e 14 os alunos de ambos os anos seleccionaram a resposta correcta com percentagens consideravelmente superiores relativamente às outras questões. Entre as questões 11 e 12, que se inserem na experiência de lançamento de dois dados, na questão 11 compara-se um caso favorável com dois casos favoráveis e na questão 12 comparam-se seis casos favoráveis com trinta casos favoráveis. Entre as questões 13 e 14, que se inserem na experiência de lançamento de duas e três moedas, respectivamente, na questão 13 compara-se um caso favorável com dois casos favoráveis e na questão 14 comparam-se dois casos favoráveis com oito casos favoráveis.

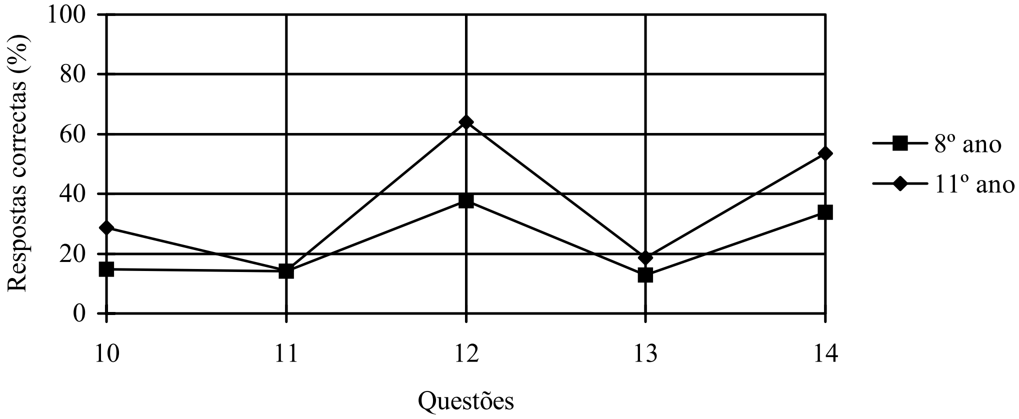


Figura 11. Percentagem de respostas correctas nas questões 10, 11, 12, 13, e 14 por ano escolar.

Por outro lado, as questões 11 e 13 são mais concretas, ou seja, são menos gerais do que as questões 12 e 14. Assim, o facto das questões 11 e 13 serem mais concretas não explica as maiores dificuldades exibidas pelos alunos em responder a estas questões. Diferentemente, o facto da discrepância entre o número de casos favoráveis dos dois acontecimentos ser menor dificultou a selecção da resposta correcta.

No caso dos alunos do 11º ano, observando a Figura 12, conclui-se que os alunos *sep* seleccionaram a resposta correcta com percentagens aproximadamente iguais ou mesmo ligeiramente superiores em relação aos alunos *cep*.

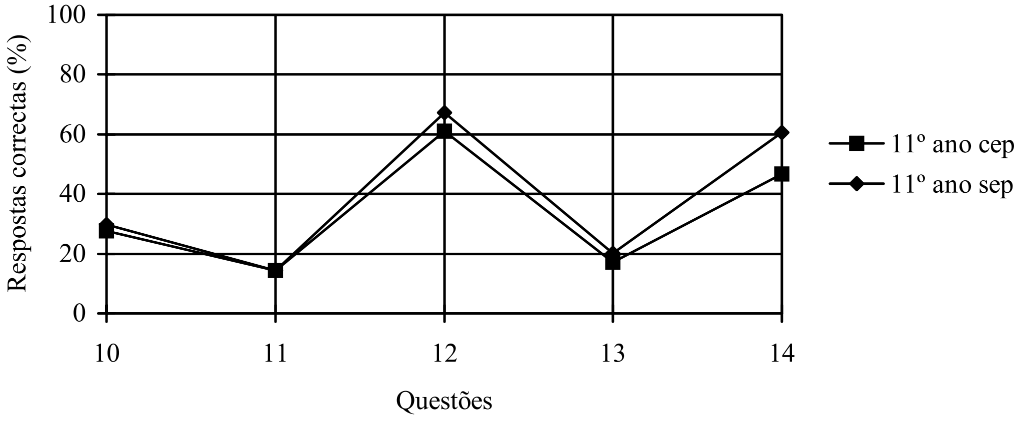


Figura 12. Percentagem de respostas correctas dos alunos do 11º ano nas questões 10, 11, 12, 13, e 14 por ensino de probabilidades.

As maiores dificuldades que os alunos sentiram em escolher a resposta correcta nestas questões reflectem-se igualmente nos raciocínios que utilizaram para justificar essa resposta. Entre os alunos do 8º ano, faz-se referência ao número de casos favoráveis e possíveis, afirma-se a maior dificuldade em obter o acontecimento menos provável ou simplesmente a maior probabilidade e apontam-se razões causais. Entre os alunos do 11º ano, além destes raciocínios, referem-se também as probabilidades dos acontecimentos, mas, comparativamente com as questões relativas a probabilidades em experiências simples, são muito menos os alunos que o referem.

Entre os alunos do 11º ano salienta-se a utilização de alguns raciocínios mais centrados no cálculo de probabilidades. Estes raciocínios referem-se ou resultam de probabilidades em experiências simples, e quase sempre conduziram a respostas erradas.

Finalmente, entre os alunos do 11º ano *cep* e *sep* não se observaram diferenças sistemáticas nos raciocínios que utilizaram ao responder ao conjunto das cinco questões. Mesmo no caso dos 'raciocínios gerais', em que se incluem conjuntamente os raciocínios *Comparar o número de casos favoráveis* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, enquanto raciocínios que garantem a escolha da resposta correcta, não se observaram percentagens de adesão muito diferentes entre os alunos *cep* e *sep*, contrariamente ao que se verificou nas questões relativas a experiências simples, conforme se verifica na Figura 13.

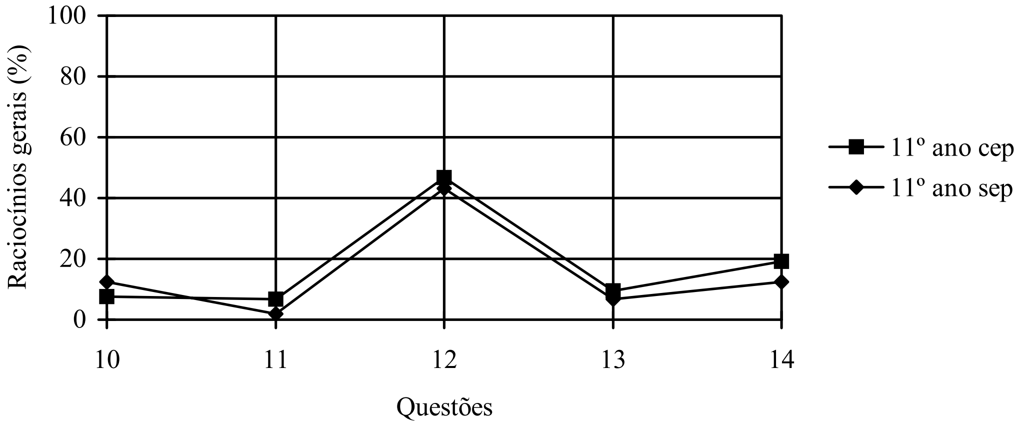


Figura 13. Percentagem de alunos do 11º ano nos 'raciocínios gerais' nas questões 10, 11, 12, 13 e 14 por ensino de probabilidades.

Comparando as Figuras 12 e 13, observa-se que as percentagens com que foram referidos os ‘raciocínios gerais’ nas várias questões seguem sensivelmente o mesmo padrão das percentagens das respostas correctas correspondentes, muito embora com percentagens inferiores.

4.2.2. Respostas correctas

Nesta subsecção estudam-se as respostas correctas dos alunos segundo as variáveis: (A) ano escolar, (B) desempenho em matemática, (C) sexo, (D) ensino de probabilidades e (E) interpretação do conceito de probabilidade.

A. Ano escolar

Na comparação entre o número de respostas correctas dos alunos do 8º ano e do 11º ano consideraram-se as várias questões individualmente, o conjunto das questões referentes a cada subtema e o conjunto de todas as questões do questionário.

Na Tabela 28 podem-se observar as percentagens de respostas correctas dos alunos de cada um dos anos escolares em cada uma das questões. Ainda em cada questão, considerando a tabela de contingência de 2×2 definida pelas frequências das respostas correctas e erradas por ano escolar, indica-se o valor de χ^2 com correcção de continuidade.

Finalmente, em relação a cada subtema e ao número total de questões, calculou-se o número total de respostas correctas e aplicou-se o teste de Mann-Whitney para avaliar a significância estatística da diferença entre os grupos. Na Tabela 28 estão registados os valores das médias das ordens e os valores de Z corrigidos para repetições.

No subtema ‘Acontecimento certo, possível e impossível’ incluem-se as questões 1, 2 e 3, cada uma das quais com cinco alíneas. Além disso, as questões 1 e 2 tratam de acontecimentos em experiências simples e a questão 3 trata de acontecimentos em experiências compostas.

Em relação à questão 1, que insere no contexto da extracção de uma bola de um saco, a aplicação do teste χ^2 determinou diferenças estatisticamente significativas nas alíneas b),

d) e e), favoráveis ao 11º ano. Quanto à questão 2, o teste χ^2 determinou diferenças estatisticamente significativas nas alíneas a), b), d) e e), também favoráveis ao 11º ano.

Tabela 28. Percentagem de respostas correctas por ano escolar em cada questão, valor de χ^2 em cada questão e valor de Z por subtema e no questionário.

SUBTEMAS	QUESTÕES	8º ANO (n=204)[1]	11º ANO (n=209)	Valor de $\chi^{2(2)}$	Valor de Z[3]
Acontecimento certo, possível e impossível.	1.a)	93.1	97.1	2.756	
	1.b)	91.7	97.6	6.095*	
	1.c)	99.0	98.1		
	1.d)	48.5	75.6	31.040**	
	1.e)	81.9	94.3	14.007**	
	Média das ordens	173.1	240.1		6.421**
	2.a)	95.6	99.5	5.198*	
	2.b)	75.0	89.0	12.813**	
	2.c)	98.0	97.6		
	2.d)	82.4	91.4	6.640*	
	2.e)	94.1	99.0	6.217*	
	Média das ordens	187.7	225.9		4.387**
	3.a)	93.1	99.0	8.148**	
	3.b)	96.1	98.6	1.596	
	3.c)	17.6	24.9	2.804	
	3.d)	75.5	83.3	3.346	
	3.e)	29.1	51.2	20.057**	
	Média das ordens	178.1	235.2		5.203**
Probabilidade em experiências simples.	4	90.7	99.5	15.623**	
	5	57.8	90.0	53.787**	
	6	27.0	47.8	18.328**	
	7	64.2	88.5	32.586**	
	8	37.3	76.6	63.512**	
	9	98.0	99.5		
	Média das ordens	149.3	263.3		9.987**
Probabilidade em experiências compostas.	10	14.7	28.7	11.069**	
	11	14.2	14.4	0.010	
	12	37.7	64.1	27.682**	
	13	12.7	18.7	2.296	
	14	33.8	53.6	15.588**	
	Média das ordens	175.9	237.4		5.401**
Questionário					
	Média das ordens	145.6	266.9		10.367**

Nota – [1] Na questão 2.e), no 8º ano, n=203. [2] Valor de χ^2 com correcção de continuidade. [3] Valor de Z corrigido para repetições. *Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.05$. **Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.01$. •Não se pode aplicar o teste χ^2 porque há frequências esperadas inferiores a 5.

Considerando o número total de respostas correctas no conjunto de todas as alíneas da questão 1, o teste de Mann-Whitney determinou diferenças estatisticamente significativas ($p<0.01$). No caso da questão 2, verificaram-se também diferenças estatisticamente significativas com base no teste de Mann-Whitney ($p<0.01$). Conclui-se, assim, que em ambas as questões os alunos do 11º ano demonstraram uma melhor realização em termos de selecção da resposta correcta.

Na questão 3, que insere no contexto da extracção de duas bolas de um saco, a aplicação do teste χ^2 determinou diferenças estatisticamente significativas nas alíneas a) e e), favoráveis ao 11º ano.

Considerando o número total de respostas correctas no conjunto de todas as alíneas da questão 3, o teste de Mann-Whitney determinou diferenças estatisticamente significativas ($p<0.01$). Tal como nas duas primeiras questões, também na questão 3, os alunos do 11º ano demonstraram uma melhor realização em termos de selecção da resposta correcta.

No subtema 'Probabilidade em experiências simples', em que se inserem as questões 4, 5, 6, 7, 8 e 9, a percentagem de respostas correctas em cada um dos anos escolares nas diferentes questões pode ser observado na Tabela 28. A aplicação do teste χ^2 às seis questões deste subtema, determinou diferenças estatisticamente significativas, favoráveis ao 11º ano, nas questões 4, 5, 6, 7 e 8.

Considerando o número total de respostas correctas no conjunto de todas as seis questões, o teste de Mann-Whitney determinou diferenças estatisticamente significativas ($p<0.01$). Portanto, conclui-se que os alunos do 11º ano demonstraram uma melhor realização em termos de selecção da resposta correcta no conjunto das questões sobre probabilidades em experiências simples.

No subtema 'Probabilidade em experiências compostas', em que se incluem as questões 10, 11, 12, 13 e 14, a percentagem de respostas correctas em cada um dos anos escolares nas diferentes questões pode ser observado na Tabela 28. A aplicação do teste χ^2 às cinco questões deste subtema, determinou diferenças estatisticamente significativas nas questões 10, 12 e 14, sempre favoráveis ao 11º ano. Considerando a generalidade das questões, observou-se que nas questões mais gerais (questões 12 e 14) obtiveram-se diferenças estatisticamente significativas, enquanto nas questões mais concretas (questões 11 e 13) tal não se verificou.

Considerando o número total de respostas correctas no conjunto de todas as cinco questões, o teste de Mann-Whitney determinou diferenças estatisticamente significativas ($p<0.01$). Consequentemente, os alunos do 11º ano demonstraram uma melhor realização em termos de selecção da resposta correcta no conjunto das questões sobre probabilidades em experiências compostas.

Finalmente, considerando o número total de respostas correctas no conjunto de todas as questões do questionário, o teste de Mann-Whitney determinou diferenças estatisticamente significativas ($p<0.01$). Portanto, os alunos do 11º ano demonstraram uma melhor realização em termos de selecção da resposta correcta no conjunto de todas as questões.

B. Desempenho em matemática

A comparação do número de respostas correctas segundo o desempenho em matemática, efectuou-se em cada um dos grupos de alunos do 8º ano e do 11º ano a partir dos vários subtemas considerados e do conjunto de todas as questões. Em termos de desempenho em matemática, consideraram-se, em cada ano escolar, três níveis de realização: baixo, médio e elevado.

Da observação dos dados da Tabela 29, conclui-se que, no caso dos alunos do 8º ano, a um maior desempenho em matemática correspondeu, em geral, um maior número de respostas correctas. A única excepção verificou-se no subtema ‘Probabilidade em experiências compostas’.

A aplicação do teste de Kruskal-Wallis determinou diferenças estatisticamente significativas na questão 1 ($p<0.05$) e na questão 2 ($p<0.01$) do subtema ‘Acontecimento certo, possível e impossível’, no subtema ‘Probabilidade em experiências simples’ ($p<0.01$) e no conjunto de todas as questões ($p<0.01$).

Tabela 29. Média das ordens segundo o desempenho em matemática e valor de H em cada subtema e no questionário, em relação às respostas correctas no 8º ano.

SUBTEMAS	QUESTÕES	8º ANO			
		Média segundo o desempenho			Valor de H[(1)]
		Baixo (n=48)	Médio (n=89)	Elevado (n=67)	
Acontecimento certo, possível e impossível.	1	84.2	106.9	109.8	7.257*
	2	76.5	103.3	120.0	21.991**
	3	93.0	99.0	114.0	5.130
Probabilidade em experiências simples.	4 a 9	71.5	99.1	129.3	28.829**
Probabilidade em experiências compostas.	10 a 14	105.1	100.9	102.7	0.179
Questionário.	1 a 14	70.6	102.4	125.4	24.352**

Nota – [(1)] Valor de H corrigido para repetições. *Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.05$. **Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.01$.

No caso dos alunos do 11º ano, a observação dos valores da Tabela 30 permite concluir que, à semelhança dos alunos do 8º ano, ao maior desempenho em matemática correspondeu, em geral, um maior número de respostas correctas. A única excepção verificou-se na questão 2 do subtema ‘Acontecimento certo, possível e impossível’.

Tabela 30. Média das ordens segundo o desempenho em matemática e valor de H em cada subtema e no questionário, em relação às respostas correctas no 11º ano.

SUBTEMAS	QUESTÕES	11º ANO			
		Média segundo o desempenho			Valor de H[(1)]
		Baixo (n=54)	Médio (n=85)	Elevado (n=70)	
Acontecimento certo, possível e impossível.	1	84.9	110.7	113.6	12.668**
	2	104.5	102.6	108.3	0.909
	3	78.9	107.3	122.4	17.631**
Probabilidade em experiências simples.	4 a 9	74.8	99.3	135.2	35.515**
Probabilidade em experiências compostas.	10 a 14	94.5	97.7	121.9	8.790*
Questionário.	1 a 14	70.0	101.8	135.9	37.232**

Nota – [(1)] Valor de H corrigido para repetições. *Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.05$. **Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.01$.

A aplicação do teste de Kruskal-Wallis determinou diferenças estatisticamente significativas na questão 1 ($p<0.01$) e na questão 3 ($p<0.01$) do subtema 'Acontecimento certo, possível e impossível', no subtema 'Probabilidade em experiências simples' ($p<0.01$), no subtema 'Probabilidade em experiências compostas' ($p<0.05$) e no conjunto de todas as questões ($p<0.01$).

C. Sexo

Tal como no caso do desempenho em matemática, a comparação do número de respostas correctas segundo o sexo efectuou-se em cada um dos grupos de alunos do 8º ano e do 11º ano a partir dos vários subtemas considerados e do conjunto de todas as questões.

Em relação aos alunos do 8º ano, observando os valores da Tabela 31, verifica-se que os alunos do sexo masculino, relativamente às respostas correctas, apresentaram uma média das ordens superior às dos alunos do sexo feminino na questão 1 do subtema 'Acontecimento certo, possível e impossível', no subtema 'Probabilidade em experiências simples', no subtema 'Probabilidade em experiências compostas' e no conjunto de todas as questões.

Tabela 31. Média das ordens segundo o sexo e valor de Z em cada subtema e no questionário, em relação às respostas correctas no 8º ano.

SUBTEMAS	QUESTÕES	8º ANO		
		Média segundo o sexo		Valor de Z(1)
		Masculino (n=103)	Feminino (n=101)	
Acontecimento certo, possível e impossível.	1	104.8	100.2	0.601
	2	101.6	103.4	0.264
	3	99.5	105.6	0.815
Probabilidade em experiências simples.	4 a 9	112.6	92.2	2.535*
Probabilidade em experiências compostas.	10 a 14	103.9	101.1	0.358
Questionário.	1 a 14	107.6	97.3	1.252

Nota – (1) Valor de Z corrigido para repetições. *Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.05$.

A aplicação do teste de Mann-Whitney apenas determinou diferenças estatisticamente significativas no conjunto das questões do subtema ‘Probabilidade em experiências simples’ ($p<0.05$).

No caso dos alunos do 11º ano, observando os valores da Tabela 32, verifica-se que os alunos do sexo masculino, relativamente às respostas correctas, apresentaram uma média das ordens superior às dos alunos do sexo feminino nas questões 2 e 3 do subtema ‘Acontecimento certo, possível e impossível’, em todos os outros subtemas e no conjunto de todas as questões.

Tabela 32. Média das ordens segundo o sexo e valor de Z em cada subtema e no questionário, em relação às respostas correctas no 11º ano.

SUBTEMAS	QUESTÕES	11º ANO		
		Média segundo o sexo		Valor de Z[1]
		Masculino (n=101)	Feminino (n=108)	
Acontecimento certo, possível e impossível.	1	103.6	106.3	0.403
	2	106.6	103.5	0.592
	3	105.3	104.7	0.082
Probabilidade em experiências simples.	4 a 9	115.1	95.6	2.463*
Probabilidade em experiências compostas.	10 a 14	111.9	98.5	1.645
Questionário.	1 a 14	114.0	96.6	2.087*

Nota – [1] Valor de Z corrigido para repetições. *Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.05$.

A aplicação do teste de Mann-Whitney apenas determinou diferenças estatisticamente significativas no conjunto das questões do subtema ‘Probabilidade em experiências simples’ ($p<0.05$) e no conjunto de todas as questões ($p<0.05$).

D. Ensino de probabilidades

A comparação do número de respostas correctas segundo o ensino de probabilidades efectuou-se apenas para o caso dos alunos do 11º ano, pois apenas neste grupo existiam alunos com ensino de probabilidades (*cep*) e alunos sem ensino de probabilidades (*sep*).

No caso dos alunos do 8º ano, todos eles não tinham tido qualquer ensino de probabilidades.

Por observação dos valores da Tabela 33 verifica-se que os alunos *cep*, relativamente às respostas correctas, apresentaram uma média de ordens superior às dos alunos *sep* na questão 1 do subtema 'Acontecimento certo, possível e impossível' e no conjunto das questões do subtema 'Probabilidade em experiências simples'. Em todos os outros casos foram os alunos *sep* que obtiveram uma média de ordens superiores.

A aplicação do teste de Mann-Whitney não determinou diferenças estatisticamente significativas em qualquer dos subtemas considerados nem no conjunto de todas as questões.

Tabela 33. Média das ordens segundo o ensino de probabilidades e valor de Z em cada subtema e no questionário, em relação às respostas correctas no 11º ano.

SUBTEMAS	QUESTÕES	11º ANO		
		Média segundo o ensino de probabilidades		Valor de Z[1]
		cep (n=105)	*sep* (n=104)	
Acontecimento certo, possível e impossível.	1	107.7	102.3	0.809
	2	103.7	106.3	0.511
	3	102.8	107.2	0.560
Probabilidade em experiências simples.	4 a 9	111.6	98.3	1.684
Probabilidade em experiências compostas.	10 a 14	98.7	111.3	1.545
Questionário.	1 a 14	102.1	107.9	0.700

Nota – [1] Valor de Z corrigido para repetições.

Em conclusão, pode afirmar-se que o ensino de probabilidades não distinguiu os alunos quanto à frequência com que escolheram as respostas correctas.

E. Interpretação do conceito de probabilidade

Para avaliar o impacto das interpretações clássica e frequencista de probabilidade sobre as respostas correctas, comparou-se o grupo de alunos do 8º ano submetido ao questionário-conceito clássico, que vem sendo referido, com um outro grupo de alunos, também do 8º ano, submetido ao questionário-conceito frequencista.

Comparados os dois grupos em relação à idade, não se verificaram diferenças estatisticamente significativas através da aplicação do teste t de Student (t=1.832). Também não se observaram diferenças estatisticamente significativas em relação ao número de alunos por sexo através da aplicação do teste χ^2 com correcção de continuidade à tabela de contingência de 2×2 (χ^2=0.091). No caso do desempenho em matemática, definido pela soma das classificações no 3º período do 7º ano e no 1º e 2º períodos do 8º ano, a aplicação do teste t de Student determinou diferenças estatisticamente significativas ($p<0.05$), favoráveis aos alunos da versão clássica.

A comparação entre as respostas correctas em cada uma das duas interpretações do conceito de probabilidade foi efectuada em cada uma das questões, nos subtemas considerados e na totalidade das questões (Tabela 34).

Por observação da Tabela 34 verifica-se que o teste χ^2 com correcção de continuidade determinou diferenças estatisticamente significativas favoráveis à versão clássica nas questões 3.b) e 9, e favoráveis à versão frequencista nas questões 2.b), 2.d), 3.d), 8, 10, 11, 12, 13 e 14.

Em relação aos diferentes subtemas considerados, o teste de Mann-Whitney determinou diferenças estatisticamente significativas na questão 3 do subtema 'Acontecimento certo, possível e impossível' ($p<0.05$) e no subtema 'Probabilidade em experiências compostas' ($p<0.01$). Obtiveram-se ainda diferenças com significância estatística no conjunto de todas as questões ($p<0.01$). Em todos estes casos as diferenças foram favoráveis à versão frequencista.

A partir destes resultados pode concluir-se que a formulação frequencista das questões favoreceu a escolha mais frequente da resposta correcta entre os respectivos alunos, especialmente nas questões envolvendo experiências compostas, que são exactamente aquelas que se revelaram mais difíceis.

Tabela 34. Percentagem de respostas correctas por interpretação do conceito de probabilidade em cada questão, valor de χ^2 em cada questão e valor de Z por subtema e no questionário.

SUBTEMA	QUESTÕES	VERSÃO CLÁSSICA (n=204)(1)	VERSÃO FREQUENCISTA (n=198)(2)	Valor de $\chi^{2(3)}$	Valor de Z(4)
Acontecimento certo, possível e impossível.	1.a)	93.1	94.4	0.113	
	1.b)	91.7	92.4	0.009	
	1.c)	99.0	95.9	2.774	
	1.d)	48.5	52.0	0.363	
	1.e)	81.9	75.6	1.969	
	Média das ordens	204.9	198.0		0.633
	2.a)	95.6	96.5	0.038	
	2.b)	75.0	84.3	4.842*	
	2.c)	98.0	94.9	2.008	
	2.d)	82.4	91.3	6.244*	
	2.e)	94.1	96.5	0.763	
	Média das ordens	195.0	208.2		1.260
	3.a)	93.1	91.4	0.212	
	3.b)	96.1	90.4	4.298*	
	3.c)	17.6	23.6	1.808	
	3.d)	75.5	85.9	6.260*	
	3.e)	29.1	31.3	0.146	
	Média das ordens	191.3	212.0		2.260*
Probabilidade em experiências simples.	4	90.7	87.4	0.817	
	5	57.8	55.6	0.131	
	6	27.0	26.8	0.005	
	7	64.2	57.6	1.593	
	8	37.3	53.0	9.475**	
	9	98.0	91.9	6.718**	
Probabilidade em experiências compostas.	Média das ordens	202.1	200.9		0.107
	10	14.7	24.2	5.249*	
	11	14.2	24.4	6.016*	
	12	37.7	62.6	23.896**	
	13	12.7	25.4	9.610**	
	14	33.8	55.8	18.773**	
	Média das ordens	169.9	234.1		5.722**
Questionário	Média das ordens	182.6	221.0		3.324**

Nota – (1)Versão clássica: na questão 3.e) n=203. (2)Versão frequencista: nas questões 1.e), 11, 13 e 14 n=197, nas questões 1.c), 1.d) e 2.d) n=196, na questão 3.c) n=195. (3)Valor de χ^2 com correcção de continuidade. (4)Valor de Z corrigido para repetições. *Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.05$. **Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.01$.

Muito embora os dois grupos não sejam equivalentes em relação ao desempenho em matemática, deve observar-se que foi o grupo submetido à versão frequencista que obteve o menor desempenho em matemática e, em geral, a melhor realização no que concerne às respostas correctas.

4.2.3. Confiança na respostas

Nesta subsecção estuda-se a confiança com que os alunos responderam às questões de 4 a 14 do questionário-conceito clássico. Recorde-se que nas três primeiras questões, cada uma constituída por cinco alíneas, os alunos afirmaram uma confiança média no conjunto das alíneas.

Para comparar a confiança dos alunos calculou-se, para cada aluno, a média das confianças em todas as questões, que designámos por confiança nas respostas, no conjunto das questões correspondentes a respostas correctas, que designámos por confiança nas respostas correctas, e no conjunto das questões correspondentes a respostas erradas, que designámos por confiança nas respostas erradas.

Seguidamente, estabeleceram-se comparações considerando as variáveis: (A) ano escolar, (B) desempenho em matemática, (C) sexo e (D) ensino de probabilidades.

A. Ano escolar

Observando a Tabela 35, verifica-se que os alunos do 8º ano depositaram uma maior confiança média nas respostas (correctas e erradas) e nas respostas erradas, comparativamente com os alunos do 11º ano. Contudo, a aplicação do teste t de Student apenas determinou diferenças estatisticamente significativas no caso das respostas erradas ($p<0.01$).

Tabela 35. Média das confianças dos alunos nas respostas, nas respostas correctas e nas respostas erradas por ano escolar.

CONFIANÇA	8º ANO (n=203)	11º ANO (n=208)	Valor de t
Média das confianças nas respostas.	3.8	3.6	1.335
Média das confianças nas respostas correctas.	3.8	3.8	0.135
Média das confianças nas respostas erradas.	3.7[(1)]	3.4 [(2)]	3.398**

Nota – [(1)] n=202. [(2)] n=206. **Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.01$.

Considerando as respostas correctas e erradas em cada um dos anos, verificou-se que no 8º ano os alunos depositaram, em média, uma maior confiança nas respostas correctas do que nas erradas, sendo estes resultados estatisticamente significativos ($p<0.01$). No caso do 11º ano, tal como no 8ºano, os alunos depositaram, em média, uma maior confiança nas respostas correctas, sendo estes resultados também estatisticamente significativos ($p<0.01$).

Em conclusão, entre os dois anos escolares, os alunos do 8º ano depositaram uma confiança superior, sendo a diferença mais acentuada no caso das respostas erradas. Além disso, em qualquer dos anos, os alunos depositaram uma maior confiança nas respostas correctas, comparativamente com as respostas erradas.

B. Desempenho em matemática

Tal como foi referido anteriormente, codificámos o desempenho em matemática em três categorias – baixo, médio e elevado – e efectuámos uma análise de variância para comparar as respectivas médias.

A comparação da confiança nas respostas (correctas e erradas), nas respostas correctas e nas respostas erradas, segundo o desempenho em matemática, efectuou-se em cada um dos grupos de alunos do 8º ano e do 11º ano.

No caso dos alunos do 8º ano, observando a Tabela 36, verifica-se que as médias das confianças nas respostas, nas respostas correctas e nas respostas erradas aumentou sistematicamente com o desempenho em matemática. Em termos de significância estatística, obtiveram-se diferenças significativas em relação às médias das confianças nas respostas ($p<0.05$) e nas respostas correctas ($p<0.05$).

Tabela 36. Média das confianças dos alunos do 8º ano nas respostas, nas respostas correctas e nas respostas erradas segundo o desempenho em matemática.

	8º ANO			
	Desempenho em matemática			Valor de F
	Baixo (n=48)	Médio (n=89)	Elevado (n=66)	
Média das confianças nas respostas.	3.5	3.8	3.9	3.928*
Média das confianças nas respostas correctas.	3.5	3.8	4.0	4.479*
Média das confianças nas respostas erradas.	3.4	3.7	3.8 (1)	2.326

Nota – (1) n=65. *Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.05$.

Tal como no 8º ano, também no 11º ano se verifica, pela Tabela 37, que a confiança nas respostas, nas respostas correctas e nas respostas erradas aumentou sistematicamente com o desempenho em matemática. Também em termos de significância estatística, obtiveram-se diferenças significativas em relação às médias das confianças nas respostas ($p<0.05$) e nas respostas correctas ($p<0.05$).

Tabela 37. Média das confianças dos alunos do 11º ano nas respostas, nas respostas correctas e nas respostas erradas segundo o desempenho em matemática.

	11º ANO			
	Desempenho em matemática			Valor de F
	Baixo (n=54)	Médio (n=84)	Elevado (n=70)	
Média das confianças nas respostas.	3.4	3.6	3.8	4.455*
Média das confianças nas respostas correctas.	3.6	3.8	4.0	3.265*
Média das confianças nas respostas erradas.	3.2	3.4[1]	3.5[2]	2.310

Nota – [1] n=83. [2] n=69. *Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.05$.

Em conclusão, verificou-se que em ambos os anos, em geral, o maior desempenho foi acompanhado por uma maior confiança, especialmente em relação às respostas e às respostas correctas.

C. Sexo

A comparação da confiança nas respostas (correctas e erradas), nas respostas correctas e nas respostas erradas, segundo o sexo, efectuou-se em cada um dos grupos de alunos do 8º ano e do 11º ano.

Observando a Tabela 38, conclui-se que no 8º ano os alunos do sexo masculino, em média, depositaram uma maior confiança nas respostas, nas respostas correctas e nas respostas erradas. Todavia, a aplicação do teste t de Student não determinou diferenças estatisticamente significativas em nenhum dos casos.

Tabela 38. Média das confianças dos alunos do 8º ano nas respostas, nas respostas correctas e nas respostas erradas por sexo.

CONFIANÇA	8º ANO		Valor de t
	Masculino (n=102)	Feminino (n=101)	
Média das confianças nas respostas.	3.8	3.7	1.491
Média das confianças nas respostas correctas.	3.9	3.7	1.565
Média das confianças nas respostas erradas.	3.8(1)	3.6	0.960

Nota – (1) n=101.

No caso dos alunos do 11º ano, observando a Tabela 39, verificou-se também que os alunos do sexo masculino, em média, depositaram sistematicamente uma maior confiança nas respostas, nas respostas correctas e nas respostas erradas. Diferentemente do 8ºano, em termos de significância estatística, a aplicação do teste t de Student determinou diferenças estatisticamente significativas entre as médias das confianças nas respostas ($p<0.01$), entre as médias das confianças nas respostas correctas ($p<0.01$) e entre as médias das confianças nas respostas erradas ($p<0.05$).

Tabela 39. Média das confianças dos alunos do 11º ano nas respostas, nas respostas correctas e nas respostas erradas por sexo.

CONFIANÇA	11º ANO		Valor de t
	Masculino (n=100)	Feminino (n=108)	
Média das confianças nas respostas.	3.9	3.5	3.632**
Média das confianças nas respostas correctas.	4.0	3.6	4.122**
Média das confianças nas respostas erradas.	3.5(1)	3.3(2)	2.185*

Nota – (1) n=99. (2) n=107. *Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.05$. **Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.01$.

Comparando cada um dos anos escolares, conclui-se que os alunos do sexo masculino em ambos os anos depositaram, em geral, uma confiança superior à dos alunos do sexo feminino. Além disso, do 8º ano para o 11º ano, a confiança dos alunos do sexo masculino acentuou-se em relação à confiança dos alunos do sexo feminino.

D. Ensino de probabilidades

A variável ensino de probabilidades, estudada apenas nos alunos do 11º ano, determinou diferenças na confiança com que os alunos afirmaram as suas respostas. Observando a Tabela 40, verifica-se que os alunos com ensino de probabilidades (*cep*) depositaram uma maior confiança média nas respostas (correctas e erradas), nas respostas correctas e nas respostas erradas, comparativamente com os alunos sem ensino de probabilidades (*sep*).

Tabela 40. Média das confianças dos alunos do 11º ano nas respostas, nas respostas correctas e nas respostas erradas por ensino de probabilidades.

CONFIANÇA	11º ANO		Valor de t
	cep (n=105)	*sep* (n=103)	
Média das confianças nas respostas.	3.8	3.5	2.400*
Média das confianças nas respostas correctas.	3.9	3.7	2.395*
Média das confianças nas respostas erradas.	3.5[1]	3.3[2]	2.146*

Nota – [1] n=104. [2] n=102. *Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.05$.

Em termos de significância estatística, a aplicação do teste t de Student determinou diferenças estatisticamente significativas entre os dois grupos em relação às médias das confianças nas respostas ($p<0.05$), em relação às médias das confianças nas respostas correctas ($p<0.05$) e em relação às médias das confianças nas respostas erradas ($p<0.05$).

Constatámos, portanto, que o ensino de probabilidades não produziu um efeito diferente sobre a confiança nas respostas correctas, pois o impacto observado nas respostas correctas também se observou nas respostas erradas.

4.3. Estudo sobre o ensino de probabilidades

Neste estudo comparam-se duas estratégias de ensino de probabilidades em alunos do 9º ano de escolaridade. Uma das estratégias consistiu num ensino tradicional do tema e a outra numa intervenção que explorou as intuições dos alunos. Tendo por referência as duas estratégias, consideraram-se dois grupos de alunos, o grupo de controlo (*contr*) – afecto ao ensino tradicional – e o grupo experimental (*exp*) – afecto à outra estratégia de ensino.

Os dados deste estudo foram obtidos através de dois tipos de instrumentos: o questionário-experiência de ensino e as fichas de avaliação. O questionário foi passado aos alunos em dois momentos distintos, imediatamente antes do ensino do tema (pré-teste) e decorrido cerca de um mês e meio depois de terminada a experiência de ensino. Assim, os resultados que se apresentam reportam-se a um grupo de alunos e a um momento de passagem do questionário e das fichas de avaliação.

No caso das fichas de avaliação, passadas imediatamente após ter terminado o ensino, pretendeu-se comparar a eficácia das duas estratégias de ensino em relação ao cálculo de probabilidades, tendo os resultados obtidos sido utilizados na avaliação escolar.

Neste estudo, a apresentação dos resultados é feita em três subsecções: 'Respostas e raciocínios', 'Respostas correctas' e 'Cálculo de probabilidades'.

4.3.1. Respostas e raciocínios

Nesta subsecção são apresentados os resultados obtidos a partir dos dados recolhidos através do questionário-experiência de ensino (Anexo I). Este questionário é constituído por 15 questões, integrando-se cada grupo de três no mesmo contexto.

Para efeitos de apresentação de resultados, consideraram-se cinco subtemas, de três questões cada um, correspondentes aos cinco contextos. Concretamente, consideraram-se os subtemas: (A) 'Acontecimentos quase certos e quase impossíveis: contexto de moedas', (B) 'Probabilidade em experiências simples: contexto de urnas', (C) 'Probabilidade em experiências simples: contexto de roletas', (D) 'Probabilidade em experiências compostas: contexto de urnas' e (E) 'Probabilidade em experiências compostas: contexto de dados'.

As respostas, que resultaram da escolha de uma resposta de entre as várias alternativas, e os raciocínios, que explicam e justificam as respostas, são apresentados para cada uma das 15 questões.

Em cada questão, apresentam-se as percentagens de alunos em cada uma das respostas possíveis e em cada um dos raciocínios em que se basearam as respostas, distinguindo-se os alunos segundo o grupo (experimental e controlo) e segundo o momento de passagem do questionário (pré-teste e pós-teste).

Tal como no estudo anterior, a categoria *Outros* foi estabelecida em todas as questões, incluindo-se nela os raciocínios que não são inteligíveis, que repetem exclusivamente algo que é afirmado no enunciado da questão e os alunos que não apresentaram qualquer raciocínio.

No Anexo V apresentam-se transcrições de exemplos de raciocínios referidos pelos alunos, em relação a todas questões.

A. Acontecimentos quase certos e quase impossíveis: contexto de moedas

Neste subtema apresentam-se os resultados obtidos nas questões 1.a), 1.b) e 1.c), que tratam da classificação de um acontecimento em certo, muito provável, pouco provável e impossível na experiência de 80 lançamentos de uma moeda ao ar.

Questão 1.a). Nesta questão estudou-se o acontecimento Obter pelo menos uma vez a face cara em 80 lançamentos de uma moeda ao ar.

Respostas. Observando os resultados obtidos, que constam da Tabela 41, verifica-se que, em relação ao pré-teste, as respostas dos dois grupos de alunos são semelhantes. Em ambos os grupos a resposta correcta foi a mais escolhida. Em relação às outras respostas, verificou-se que a classificação do acontecimento em certo foi uma resposta escolhida por um considerável número de alunos em ambos os grupos.

Tabela 41. Percentagem de alunos nas respostas da questão 1.a) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RESPOSTAS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
De certeza.	39.2	30.8	7.3	26.5
É muito provável.*	52.6	53.3	89.6	59.8
É pouco provável.	5.1	13.1	3.1	13.7
É impossível.	3.1	2.8	0.0	0.0

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Já no caso do pós-teste a situação é diferente. Muito embora ambos os grupos de alunos tenham escolhido maioritariamente a resposta correcta, é consideravelmente maior a percentagem de alunos do grupo experimental que a escolheram.

Do pré-teste para o pós-teste, enquanto os alunos do grupo de controlo escolheram as diferentes respostas com percentagens semelhantes, a percentagem de alunos do grupo experimental que escolheram a resposta correcta aumentou consideravelmente, aproximadamente do mesmo valor com que diminuiu a percentagem de alunos que afirmaram tratar-se de um acontecimento certo.

Raciocínios. Os raciocínios que os alunos apresentaram para explicar e justificar as suas respostas estão registados na Tabela 42. No raciocínio *Referência à moeda*, os alunos, em geral, basearam as respostas na equiprobabilidade das faces da moeda ou no facto da moeda possuir duas faces. Este raciocínio conduziu, quase sempre, a classificar o acontecimento em muito provável (pré-teste: *exp* 7.2%, *contr* 6.5%; pós-teste: *exp* 19.8%, *contr* 11.8%). Dos restantes alunos, um classificou o acontecimento em pouco provável e os restantes classificaram-no em certo.

Quanto ao raciocínio *Referência ao número de lançamentos*, em que se evidencia o elevado número de lançamentos, verificou-se que os alunos que o indicaram classificaram o acontecimento em certo (pré-teste: *exp* 26.8%, *contr* 17.8%; pós-teste: *exp* 1.1%, *contr* 16.7%) ou em muito provável (pré-teste: *exp* 24.7%, *contr* 29.9%; pós-teste: *exp* 35.4%, *contr* 28.4%).

Tabela 42. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 1.a) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RACIOCÍNIOS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Referência à moeda.	8.3	7.5	20.8	13.7
Referência ao número de lançamentos.	51.5	47.7	36.5	45.1
Referência ao número de lançamentos e à moeda.	13.4	9.3	15.6	8.8
Não é um acontecimento certo.	5.2	5.6	17.7	0.0
Cálculo da probabilidade.	0.0	0.0	0.0	8.8
Interpretação errada do enunciado.	7.2	11.2	0.0	3.0
Razões causais.	1.0	5.6	1.1	0.0
Outros.	13.4	13.1	8.3	20.6

No raciocínio *Referência ao número de lançamentos e à moeda*, os alunos referiram-se simultaneamente ao número de lançamentos e à moeda. Tal como no raciocínio anterior, verificou-se que os alunos que adoptaram este raciocínio classificaram o acontecimento em certo (pré-teste: *exp* 5.2%, *contr* 5.6%; pós-teste: *exp* 2.1%, *contr* 2.9%) ou em muito provável (pré-teste: *exp* 8.2%, *contr* 3.7%; pós-teste: *exp* 13.5%, *contr* 5.9%).

Já o raciocínio *Não é um acontecimento certo*, que consistiu na identificação de que não se tratava de um acontecimento certo, levou os alunos a classificarem o acontecimento em muito provável.

No raciocínio *Cálculo da probabilidade*, observou-se que a probabilidade de obter pelo menos uma vez a face cara foi determinada pelas razões 1/80 e 79/80, o que levou a classificar o acontecimento em pouco provável (pós-teste: *contr* 6.9%) e em muito provável (pós-teste: *contr* 1.9%), respectivamente. Neste raciocínio, destaca-se o seu impacto no grupo de controlo ao induzir estes alunos a seleccionarem uma resposta errada.

O raciocínio *Interpretação errada do enunciado* resultou dos alunos interpretarem a expressão 'pelo menos uma vez' como sendo 'exactamente uma vez'. Observe-se que esta interpretação parece estar subjacente ao cálculo da probabilidade 1/80, referido antes. A adesão a este raciocínio, levou os alunos a classificarem o acontecimento em pouco provável (pré-teste: *exp* 4.1%, *contr* 9.3%; pós-teste: *exp* 0.0%, *contr* 3.0%) ou em impossível (pré-teste: *exp* 3.1%, *contr* 1.9%).

Finalmente, o raciocínio *Razões causais*, que resultou da indicação de factores causais, conduziu os alunos a classificaram o acontecimento em certo (pré-teste: *exp* 1.0%, *contr* 1.9%; pós-teste: *exp* 1.1%, *contr* 0.0%) ou em muito provável (pré-teste: *exp* 0.0%, *contr* 3.7%).

Questão 1.b). Nesta questão estudou-se o acontecimento *Obter <u>exactamente</u> 40 vezes a face cara em 80 lançamentos de uma moeda ao ar*.

<u>Respostas</u>. Observando os resultados obtidos, que constam da Tabela 43, conclui-se que a resposta correcta foi a mais escolhida, quer no pré-teste, quer no pós-teste. Seguidamente, a classificação do acontecimento em muito provável foi afirmada por uma percentagem considerável de alunos no pré-teste e no pós-teste.

Quanto às outras duas respostas possíveis, verificou-se que foram escolhidas por muito poucos alunos de ambos os grupos, tanto no pré-teste como no pós-teste.

Em relação ao pré-teste, verificou-se que ambos os grupos de alunos escolheram as várias respostas com percentagens semelhantes. No caso do pós-teste, salienta-se a selecção da resposta correcta por uma percentagem de alunos do grupo experimental um pouco superior.

Tabela 43. Percentagem de alunos nas respostas da questão 1.b) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RESPOSTAS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=106)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
De certeza.	2.1	0.9	0.0	2.9
É muito provável.	26.8	32.1	30.2	36.3
É pouco provável.*	68.0	65.1	69.8	60.8
É impossível.	3.1	1.9	0.0	0.0

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Do pré-teste para o pós-teste, a percentagem de alunos que escolheram a resposta correcta aumentou ligeiramente no grupo experimental, enquanto no grupo de controlo diminuiu. No caso da resposta *É muito provável*, observou-se em ambos os grupos um ligeiro aumento da percentagem com que foi seleccionada.

Raciocínios. Os raciocínios que os alunos apresentaram para justificar as respostas dadas, que constam da Tabela 44, são semelhantes aos referidos na questão 1.a), exceptuando os raciocínios *Referência ao número exacto de resultados* e *Não é um acontecimento impossível*.

Tabela 44. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 1.b) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RACIOCÍNIOS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=106)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Referência à moeda.	4.1	4.7	13.6	8.8
Referência ao número exacto de resultados.	46.4	41.5	53.1	37.3
Referência ao número de lançamentos e à moeda.	12.4	15.1	7.3	9.8
Não é um acontecimento certo.	0.0	0.0	2.1	0.0
Não é um acontecimento impossível.	12.4	12.3	8.3	4.9
Cálculo da probabilidade.	0.0	0.0	2.1	22.5
Razões causais.	5.1	10.4	1.0	0.0
Outros.	19.6	16.0	12.5	16.7

No caso do raciocínio *Referência à moeda*, verificou-se que quase todos os alunos que o adoptaram classificaram o acontecimento em muito provável (pré-teste: *exp* 4.1%, *contr* 4.7%; pós-teste: *exp* 11.5%, *contr* 6.9%). Os restantes alunos classificaram o acontecimento em pouco provável.

Quanto ao raciocínio *Referência ao número exacto de resultados*, observou-se que a referência a um número exacto de resultados, acompanhado muitas vezes de uma alusão ao grande número de lançamentos da moeda, levou quase todos estes alunos a classificarem o acontecimento em pouco provável (pré-teste: exp 44.3%, contr 40.6%; pós-teste: exp 53.1%, contr 37.3%). Os restantes alunos classificaram o acontecimento em impossível, o que se verificou apenas no pré-teste.

No raciocínio *Referência ao número de lançamentos e à moeda*, diferentemente do anterior, verificou-se que conduziu quase sempre à classificação do acontecimento em muito provável (pré-teste: *exp* 12.4%, *contr* 15.1%; pós-teste: *exp* 6.3%, *contr* 8.8%). Dos restantes alunos, um classificou o acontecimento em pouco provável e outro classificou-o em certo. A classificação do acontecimento em muito provável a partir deste raciocínio pode ter resultado do facto da probabilidade de obter a face cara da moeda ser 50% e de 50% de 80 ser exactamente 40, como foi referido por alguns destes alunos.

Também no caso do raciocínio *Não é um acontecimento certo*, referido apenas no pós-teste por alunos do grupo experimental, verificou-se que conduziu à classificação do acontecimento em muito provável.

Já no caso do raciocínio *Não é um acontecimento impossível*, que consistiu em identificar o acontecimento como possível, observou-se que conduziu sempre à classificação do acontecimento em pouco provável, tendo-se verificado uma diminuição da percentagem de alunos que o seleccionaram em ambos os grupos do pré-teste para o pós-teste, tendo sido maior a diminuição no grupo de controlo.

O raciocínio *Cálculo da probabilidade* foi apenas referido no pós-teste, e com muito maior incidência no grupo de controlo. Este raciocínio resultou do cálculo da probabilidade através da razão 40/80, seguindo-se uma avaliação subjectiva da grandeza deste número. Esta avaliação levou os alunos a classificarem o acontecimento em muito provável (pós-teste: *exp* 2.1%, *contr* 15.7%) ou em pouco provável (pós-teste: *exp* 0.0%, *contr* 6.8%).

Por fim, o raciocínio *Razões causais* conduziu a um leque variado de respostas. Especificamente, o acontecimento foi classificado em muito provável (pré-teste: *exp* 2.0%, *contr* 2.8%), em pouco provável (pré-teste: *exp* 3.1%, *contr* 6.6%; pós-teste: *exp* 1.0%, *contr* 0.0%) e em impossível (pré-teste: *exp* 0.0%, *contr* 1.0%).

Questão 1.c). Nesta questão estudou-se o acontecimento *Obter sempre a face cara em 80 lançamentos de uma moeda ao ar*.

Respostas. Os dados obtidos, que constam da Tabela 45, mostram que a maioria dos alunos de ambos os grupos responderam correctamente a esta questão. No pré-teste, a resposta correcta foi seleccionada por uma percentagem ligeiramente superior no grupo de controlo, enquanto no pós-teste foi escolhida por uma percentagem consideravelmente superior no grupo experimental. Observa-se ainda que, do pré-teste para o pós-teste, a percentagem de alunos que responderam correctamente aumentou em ambos os grupos, muito embora esse aumento tenha sido muito maior no grupo experimental.

Tabela 45. Percentagem de alunos nas respostas da questão 1.c) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RESPOSTAS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
De certeza.	2.1	0.0	0.0	3.0
É muito provável.	1.0	1.9	2.1	3.9
É pouco provável.*	52.6	55.1	91.7	69.6
É impossível.	44.3	43.0	6.2	23.5

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Além da classificação do acontecimento em pouco provável, apenas a classificação em impossível obteve percentagens consideráveis. No pré-teste, obtiveram-se percentagens semelhantes em ambos os grupos e, no pós-teste, as percentagens são muito diferentes nos dois grupos. Do pré-teste para o pós-teste, verifica-se uma maior diminuição na escolha desta resposta entre os alunos do grupo experimental do que entre os alunos do grupo de controlo.

Raciocínios. Os raciocínios em que os alunos basearam as suas respostas, que constam da Tabela 46, são raciocínios que os alunos já utilizaram nas questões 1.a) ou 1.b).

O recurso ao raciocínio *Referência à moeda*, aumentou muito consideravelmente do pré-teste para o pós-teste, e mais frequentemente justificou a classificação do acontecimento em pouco provável (pré-teste: *exp* 6.2%, *contr* 5.6%; pós-teste: *exp* 31.3%, *contr* 17.7%). A adopção deste raciocínio conduziu ainda à classificação do acontecimento em impossível (pré-teste: *exp* 6.2%, *contr* 0.0%; pós-teste: *exp* 2.1%, *contr* 7.8%) ou em muito provável (pós-teste: *exp* 1.0%, *contr* 0.0%).

Tabela 46. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 1.c) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RACIOCÍNIOS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Referência à moeda.	12.4	5.6	34.4	25.5
Referência ao número de lançamentos.	26.8	43.9	20.8	14.7
Referência ao número de lançamentos e à moeda.	24.8	14.0	7.3	22.6
Não é um acontecimento certo.	0.0	0.0	2.1	0.0
Não é um acontecimento impossível.	14.4	15.9	17.7	10.8
Cálculo da probabilidade.	0.0	0.0	0.0	7.8
Razões causais.	7.2	8.4	0.0	0.0
Outros.	14.4	12.2	17.7	18.6

A utilização do raciocínio *Referência ao número de lançamentos* diminuiu em ambos os grupos do pré-teste para o pós-teste, embora de forma muito mais acentuada no grupo de controlo, e conduziu à classificação do acontecimento em pouco provável (pré-teste: *exp* 14.4%, *contr* 20.5%; pós-teste: *exp* 18.7%, *contr* 12.7%) ou impossível (pré-teste: *exp* 12.4%, *contr* 23.4%; pós-teste: *exp* 2.1%, *contr* 2.0%).

Já o raciocínio *Referência ao número de lançamentos e à moeda* foi mais frequentemente referido pelos alunos do grupo experimental no pré-teste e pelos alunos do grupo de controlo no pós-teste. Tal como no raciocínio anterior, este raciocínio justificou a classificação do acontecimento em pouco provável (pré-teste: *exp* 6.2%, *contr* 3.7%; pós-teste: *exp* 7.3%, *contr* 9.8%) ou em impossível (pré-teste: *exp* 18.6%, *contr* 10.3%; pós-teste: *exp* 0.0%, *contr* 12,8%).

O raciocínio *Não é um acontecimento certo* foi apenas referido por alunos do grupo experimental no pós-teste, e conduziu à classificação do acontecimento em pouco provável.

Quanto ao raciocínio *Não é um acontecimento impossível*, verificou-se que conduziu sempre à resposta correcta e foi referido sensivelmente por uma percentagem semelhante de alunos de ambos os grupos no pré-teste e por uma maior percentagem de alunos do grupo experimental no pós-teste.

O raciocínio *Cálculo da probabilidade*, que resultou do cálculo da probabilidade através das razões 1/80 e 80/80, foi referido apenas por alunos do grupo de controlo no pós-teste e, coerentemente, conduziu a que os alunos classificassem o acontecimento em pouco provável (3.9%) e em certo (2.9%), respectivamente. Um aluno, não associando a probabilidade 1 ao acontecimento certo, classificou o acontecimento em muito provável.

Finalmente, o raciocínio *Razões causais* foi referido apenas no pré-teste por alunos de ambos os grupos, e como nas outras questões conduziu a várias respostas. Concretamente, o acontecimento foi classificado em pouco provável (pré-teste: *exp* 4.1%, *contr* 5.6%) e em impossível (pré-teste: *exp* 3.1%, *contr* 2.8%).

Síntese dos resultados nas três questões do subtema. No pós-teste relativamente às três questões deste subtema, observou-se que em todas elas os alunos do grupo experimental seleccionaram mais frequentemente a resposta correcta do que os alunos do grupo de controlo, conforme se pode observar na Figura 14.

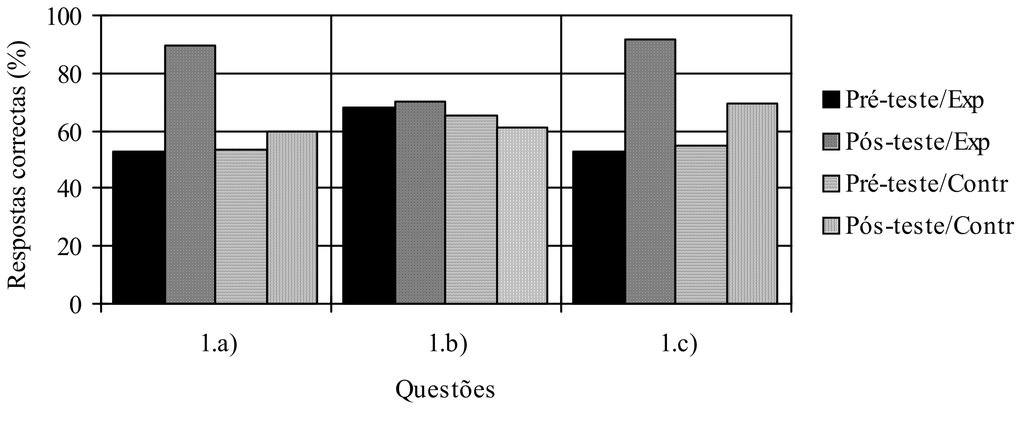


Figura 14. Percentagem de respostas correctas nas questões 1.a), 1.b) e 1.c) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

Do pré-teste para o pós-teste, destacam-se progressos consideráveis no grupo experimental nas questões 1.a) e 1.c), em comparação com o grupo de controlo. Em relação à maior dificuldade verificada na questão 1.b), observe-se que nas outras duas questões as probabilidades aproximam-se mais de 1 e 0, respectivamente.

A maior percentagem de respostas correctas do grupo experimental no pós-teste explica-se, fundamentalmente, pela maior percentagem de alunos que neste grupo seleccionaram a resposta correcta a partir dos raciocínios: *Referência à moeda* e *Referência ao número de lançamentos*, nas questões 1.a) e 1.c), *Referência ao número de lançamentos e à moeda*, na questão 1.a), *Referência ao número exacto de resultados*, na questão 1.b), *Não é um acontecimento certo*, na questão 1.a), e *Não é um acontecimento impossível*, nas questões 1.b) e 1.c).

Salienta-se, ainda, que de entre todos os raciocínios referidos antes, conduziram sistematicamente à escolha da resposta correcta os raciocínios *Não é um acontecimento certo*, na questão 1.a), e *Não é um acontecimento impossível*, nas questões 1.b) e 1.c). Ambos estes raciocínios, no pós-teste, foram mais referidos no grupo experimental. Já o raciocínio *Cálculo da probabilidade*, referido apenas no pós-teste, foi sistematicamente mais mencionado pelo grupo de controlo em todas as questões e muito frequentemente conduziu à escolha de uma resposta errada.

A adopção de raciocínios não normativos, que se verificou em todas as três questões, pode explicar-se pelo facto de tais raciocínios envolverem técnicas de contagem relativamente complexas, como é o caso das combinações, ou o cálculo de probabilidades em experiências repetidas, assuntos que não foram tratados nas aulas.

B. Probabilidade em experiências simples: contexto de urnas

Neste subtema apresentam-se os resultados obtidos nas questões 2.a), 2.b) e 2.c), em que se comparam as probabilidades de extrair uma bola preta de dois sacos com um certo número de bolas brancas e de bolas pretas.

Questão 2.a). Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter uma bola preta do saco I* e *Obter uma bola preta do saco II* na experiência de extracção de uma bola de cada saco, considerando que o número de bolas pretas é igual em ambos os sacos.

Respostas. Observando as respostas obtidas nesta questão, que constam da Tabela 47, verifica-se que a maior percentagem de alunos de ambos os grupos e nos dois momentos afirmou a maior probabilidade do acontecimento *Obter uma bola preta do saco I*, que é a resposta correcta.

Tabela 47. Percentagem de alunos nas respostas da questão 2.a) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RESPOSTAS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Obter uma bola preta do saco I.*	73.2	78.5	95.8	89.2
Obter uma bola preta do saco II.	2.1	5.6	3.1	3.9
É igualmente provável.	24.7	15.9	1.1	6.9

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Apenas no pré-teste se verificou uma considerável percentagem de alunos de ambos os grupos que afirmaram a equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

Do pré-teste para o pós-teste, assistiu-se a um aumento da percentagem de alunos de ambos os grupos que responderam correctamente à questão, muito embora esse aumento tenha sido mais pronunciado no grupo experimental do que no grupo de controlo. Para além da resposta correcta, foi a afirmação da equiprobabilidade dos dois acontecimentos que mais distinguiu o grupo experimental do grupo de controlo.

Raciocínios. Os raciocínios que os alunos utilizaram para justificar as respostas podem ser observados na Tabela 48. No caso do raciocínio *Comparar o número total de bolas*, os alunos compararam o número total de bolas dos dois sacos. Poucos alunos recorreram a este raciocínio no pré-teste e no pós-teste para afirmarem ser mais provável obter uma bola preta do saco I, pois é aquele que tem o menor número de bolas.

Tabela 48. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 2.a) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RACIOCÍNIOS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Comparar o número total de bolas.	5.2	5.6	3.1	5.9
Comparar o número de bolas brancas.	23.7	19.6	9.4	8.8
Comparar o número de bolas pretas.	16.5	10.3	1.0	4.9
Comparar o número de bolas brancas e pretas.	37.1	43.9	35.4	33.3
Proporção do número de bolas.	0.0	0.0	4.2	0.0
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	3.1	0.0	42.7	38.3
Ambos os acontecimentos são possíveis.	4.1	4.7	0.0	0.0
Outros.	10.3	15.9	4.2	8.8

No raciocínio *Comparar o número de bolas brancas* compararam-se os dois sacos quanto ao número de bolas brancas. Observando que o saco I tem menos bolas brancas do que o saco II, os alunos afirmaram a maior probabilidade de obter uma bola preta do saco I. Muito embora este raciocínio tenha sido adoptado por percentagens semelhantes de alunos de ambos os grupos no pré-teste e no pós-teste, a referência a este raciocínio diminuiu consideravelmente em ambos os grupos do pré-teste para o pós-teste.

No raciocínio *Comparar o número de bolas pretas* compararam-se os dois sacos quanto ao número de bolas pretas. Observando que ambos os sacos têm igual número de bolas pretas, os alunos afirmaram a equiprobabilidade dos dois acontecimentos. No pré-teste, este raciocínio foi mais frequentemente referido no grupo experimental e, no pós-teste, foi mais frequentemente referido no grupo de controlo. Assim, do pré-teste para o pós-teste, adesão a este raciocínio diminuiu mais no grupo experimental.

O raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas* consistiu em comparar o número de bolas brancas e pretas em cada um dos sacos ou nos dois sacos e levou os alunos a afirmarem ser mais provável obter uma bola preta do saco I. Na comparação do número de bolas da mesma cor entre os dois sacos, os alunos observaram que o saco II tem tantas bolas pretas como o saco I, mas o saco I tem menos bolas brancas ou menos bolas no total em relação ao saco II. Na comparação do número de bolas de ambas as cores em cada saco, os alunos observaram que no saco I há tantas bolas pretas como brancas e no saco II há mais bolas brancas do que pretas. Do pré-teste para o pós-teste, verificou-se que a percentagem de alunos que referiram este raciocínio diminuiu em ambos os grupos, embora mais acentuadamente no grupo de controlo.

Já o raciocínio *Proporção do número de bolas*, que resultou de comparar em cada saco a proporção de bolas de cada cor, foi adoptado apenas por 4.2% de alunos do grupo experimental, no pós-teste, para justificarem a resposta correcta.

O raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, que consistiu na comparação das probabilidades dos dois acontecimentos, conduziu sempre à escolha da resposta correcta. Verificou-se uma grande adesão a este raciocínio no pós-teste, já que no pré-teste foi referido apenas por muito poucos alunos do grupo experimental.

Finalmente, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* resultou da possibilidade dos dois acontecimentos ocorrerem e levou os alunos a afirmarem a equiprobabilidade dos acontecimentos. Este raciocínio foi referido apenas no pré-teste por percentagens semelhantes de alunos em ambos os grupos.

Considerando conjuntamente os raciocínios *Proporção do número de bolas* e *Comparar a probabilidade dos acontecimentos*, enquanto raciocínios que garantem a escolha da resposta correcta, verifica-se que, no pós-teste, os alunos do grupo experimental adoptaram mais frequentemente estes raciocínios (pós-teste: *exp* 46.9%, *contr* 38.3%).

Questão 2.b). Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter uma bola preta do saco I* e *Obter uma bola preta do saco II* na experiência de extracção de uma bola de cada saco, considerando que é diferente o número e a razão entre o número de bolas de cada cor em ambos os sacos.

<u>Respostas</u>. Observando as respostas obtidas nesta questão, que constam da Tabela 49, verifica-se que, no pré-teste, os alunos de ambos os grupos afirmaram mais frequentemente a equiprobabilidade dos dois acontecimentos, enquanto no pós-teste

afirmaram mais frequentemente a maior probabilidade de obter uma bola preta do saco II.

Tabela 49. Percentagem de alunos nas respostas da questão 2.b) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RESPOSTAS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=106)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Obter uma bola preta do saco I.	12.4	19.8	6.3	9.8
Obter uma bola preta do saco II.*	41.2	34.0	70.8	61.8
É igualmente provável.	46.4	46.2	22.9	28.4

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Tanto no pré-teste como no pós-teste, a resposta correcta foi seleccionada mais frequentemente pelos alunos do grupo experimental. Em relação à equiprobabilidade dos dois acontecimentos, verificou-se, no pré-teste, que foi afirmada por percentagens semelhantes de alunos de ambos os grupos, enquanto, no pós-teste, foi no grupo de controlo que foi mais frequentemente seleccionada.

Raciocínios. Os raciocínios referidos nesta questão, que constam da Tabela 50, são semelhantes aos referidos na questão anterior. O raciocínio *Comparar o número total de bolas* foi utilizado para justificar a maior probabilidade de obter uma bola preta do saco I (pré-teste: *exp* 8.2%, *contr* 14.1%; pós-teste: *exp* 3.2%, *contr* 3.0%), pelo facto de nele haver o menor número total de bolas, ou a maior probabilidade de obter uma bola preta do saco II (pós-teste: *exp* 1.0%, *contr* 3.9%), pelo facto de nele haver o maior número total de bolas. Em geral, do pré-teste para o pós-teste, observou-se uma diminuição da percentagem de alunos de ambos os grupos neste raciocínio.

O raciocínio *Comparar o número de bolas brancas*, foi referido para justificar a maior probabilidade de obter uma bola preta do saco I, pelo facto desse saco ter o menor número de bolas brancas. Verificou-se, ainda, que muito poucos alunos de ambos os grupos aderiram a este raciocínio em qualquer dos momentos.

O raciocínio *Comparar o número de bolas pretas*, foi referido para justificar a maior probabilidade de obter uma bola preta do saco II, pelo facto desse saco ter o maior número de bolas pretas. Globalmente, do pré-teste para o pós-teste, verificou-se uma diminuição da percentagem de alunos que aderiram a este raciocínio, sendo mais acentuada no grupo experimental.

Tabela 50. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 2.b) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RACIOCÍNIOS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	Contr (n=106)	Exp (n=96)	Contr (n=102)
Comparar o número total de bolas.	8.2	14.1	4.2	6.9
Comparar o número de bolas brancas.	3.1	3.8	1.0	2.9
Comparar o número de bolas pretas.	30.9	28.3	7.3	18.6
Comparar o número de bolas brancas e pretas.	34.0	26.4	18.7	23.5
Proporção do número de bolas.	2.1	3.8	9.4	0.0
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	3.1	0.0	52.1	36.3
Ambos os acontecimentos são possíveis.	2.1	3.8	0.0	0.0
Outros.	16.5	19.8	7.3	11.8

No caso do raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas*, observou-se que conduziu sempre a afirmar a equiprobabilidade dos dois acontecimentos. Na comparação dos dois sacos quanto ao número de bolas de cada cor, os alunos observaram que o saco II tinha mais bolas pretas do que o saco I mas também tinha mais bolas brancas e, frequentemente, observaram que o saco II tinha mais uma bola de cada cor em relação ao saco I. No caso da comparação em cada saco do número de bolas de cada cor, os alunos observaram que em ambos os sacos havia mais bolas brancas do que pretas e, frequentemente, observaram que em ambos os sacos havia mais uma bola branca do que pretas. Em geral, do pré-teste para o pós-teste, verificou-se uma diminuição da percentagem de alunos que referiram este raciocínio em ambos os grupos, mais acentuada no grupo experimental.

Quanto ao raciocínio *Proporção do número de bolas*, verificou-se que os alunos compararam em cada saco a proporção de bolas de cada cor e conduziu sempre à afirmação da maior probabilidade de obter uma bola preta do saco II. A utilização deste raciocínio, do pré-teste para o pós-teste, aumentou no grupo experimental e diminuiu no grupo de controlo.

Também o raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, referido quase sempre no pós-teste, conduziu à afirmação da maior probabilidade de obter uma bola preta do saco II. Do pré-teste para o pós-teste, verificou-se em ambos os grupos um aumento da percentagem de alunos que referiram este raciocínio, embora esse aumento tenha sido maior no caso do grupo experimental.

Por fim, a adesão ao raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* aconteceu apenas no pré-teste e os poucos alunos que o referiram afirmaram sempre a equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

No pós-teste, a consideração conjunta dos raciocínios *Proporção do número de bolas* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, enquanto raciocínios que garantem a selecção da resposta correcta, revela que eles foram mais frequentemente referidos entre os alunos do grupo experimental (pós-teste: *exp* 61.5%, *contr* 36.3%).

Questão 2.c). Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter uma bola preta do saco I* e *Obter uma bola preta do saco II* na experiência de extracção de uma bola de cada saco, considerando que é diferente o número de bolas de cada cor em ambos os sacos e é igual a sua razão.

<u>Respostas</u>. Os resultados obtidos nesta questão, que constam da Tabela 51, revelam que, no pré-teste, a maior probabilidade de obter uma bola preta do saco II foi afirmada pela maior percentagem de alunos em ambos os grupos. Diferentemente, no pós-teste, foi a equiprobabilidade dos dois acontecimentos a resposta mais escolhida em ambos os grupos.

Tabela 51. Percentagem de alunos nas respostas da questão 2.c) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RESPOSTAS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=106)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Obter uma bola preta do saco I.	12.4	13.2	2.1	6.9
Obter uma bola preta do saco II.	50.5	53.8	17.7	32.3
É igualmente provável.*	37.1	33.0	80.2	60.8

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Seguidamente, em termos de maior percentagem, no pré-teste, ambos os grupos afirmaram a equiprobabilidade dos dois acontecimentos e, no pós-teste, também ambos os grupos afirmaram ser mais provável obter uma bola preta do saco II.

Do pré-teste para o pós-teste, houve um aumento considerável da percentagem de alunos de ambos os grupos que escolheram a resposta correcta, muito embora esse aumento seja mais acentuado no grupo experimental. Relativamente às outras duas respostas, verificou-se uma diminuição da percentagem de alunos que as escolheram em ambos os grupos.

Raciocínios. Em relação aos raciocínios que os alunos referiram para justificar as respostas, que podem ser observados na Tabela 52, constata-se que são semelhantes aos que foram referidos nas duas questões anteriores.

Tabela 52. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 2.c) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RACIOCÍNIOS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=106)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Comparar o número total de bolas.	0.0	5.7	0.0	2.9
Comparar o número de bolas brancas.	8.2	4.7	0.0	3.9
Comparar o número de bolas pretas.	38.1	40.6	12.5	22.6
Comparar o número de bolas brancas e pretas.	20.6	18.9	5.2	8.8
Proporção do número de bolas.	13.4	15.1	25.0	10.8
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	2.1	0.0	46.9	39.2
Ambos os acontecimentos são possíveis.	2.1	0.9	0.0	0.0
Outros.	15.5	14.1	10.4	11.8

No caso do raciocínio *Comparar o número total de bolas*, apenas alunos do grupo de controlo o utilizaram para justificar a maior probabilidade de obter uma bola preta do saco I e do saco II, consoante se centraram no menor e no maior número de bolas de cada saco, respectivamente. Estes alunos, no pré-teste, afirmaram sempre a maior probabilidade de obter uma bola preta do saco I, enquanto, no pós-teste, afirmaram sempre a maior probabilidade de obter uma bola preta do saco II.

O raciocínio *Comparar o número de bolas brancas*, que consistiu na observação do menor número de bolas brancas do saco I em relação ao saco II, foi referido para justificar a maior probabilidade de obter uma bola preta do saco I. Este raciocínio foi referido por poucos alunos tanto no pré-teste como no pós-teste. Do pré-teste para o pós-teste, houve uma diminuição da percentagem de alunos que aderiram a este raciocínio em ambos os grupos, embora maior no grupo experimental.

O raciocínio *Comparar o número de bolas pretas*, que consistiu na observação do maior número de bolas pretas do saco II em relação ao saco I, foi referido para justificar a maior probabilidade de obter uma bola preta do saco II. Este raciocínio foi referida por muitos alunos de ambos os grupos, especialmente no pré-teste. Do pré-teste para o pós-teste, houve uma diminuição da percentagem de alunos que aderiram a este raciocínio em ambos os grupos, embora maior no grupo experimental.

Já no caso do raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas*, ele foi utilizado para justificar a maior probabilidade de obter uma bola preta do saco II e a equiprobabilidade dos dois acontecimentos. A maior probabilidade de obter uma bola preta do saco II foi afirmada por uma pequena percentagem de alunos (pré-teste: *exp* 5.1%, *contr* 6.6%; pós-teste: *exp* 1.0%, *contr* 3.9%), e resultou da observação de que no saco II havia mais duas bolas pretas e apenas mais uma bola branca do que no saco I ou que no saco I havia mais uma bola preta do que brancas e no saco II havia mais duas bolas pretas do que brancas. Comparativamente, a afirmação da equiprobabilidade dos dois acontecimentos foi referida por uma maior percentagem de alunos (pré-teste: *exp* 15.5%, *contr* 12.3%; pós-teste: *exp* 4.2%, *contr* 4.9%), e resultou da observação de que no saco II havia mais bolas pretas e mais bolas brancas do que no saco I ou de que em ambos os sacos havia mais bolas pretas do que brancas. Do pré-teste para o pós-teste, verificou-se uma diminuição da percentagem de alunos que aderiram a este raciocínio.

O raciocínio *Proporção do número de bolas* foi sempre utilizado para justificar a equiprobabilidade dos dois acontecimentos. Este raciocínio resultou, quer da comparação nos dois sacos da proporção de bolas da mesma cor, quer da comparação em cada saco da proporção de bolas de cada cor. Do pré-teste para o pós-teste, no grupo experimental, verificou-se um aumento da percentagem de alunos que aderiram a este raciocínio e, no grupo de controlo, observou-se uma diminuição da percentagem de alunos que o referiram.

No caso do raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, referido quase sempre no pós-teste, verificou-se que conduziu sempre à afirmação da equiprobabilidade dos dois acontecimentos e foi mais referido no grupo experimental.

Finalmente, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* foi referido apenas no pré-teste por muito poucos alunos de ambos os grupos para justificarem a equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

Considerando no pós-teste, tal como nas duas questões anteriores, conjuntamente os raciocínios *Proporção do número de bolas* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, enquanto raciocínios que garantem a escolha da resposta correcta, observa-se que foram referidos mais frequentemente no grupo experimental do que no grupo de controlo (pós-teste: *exp* 71.9%, *contr* 50.0%).

Síntese dos resultados nas três questões do subtema. Na Figura 15 podem observar-se as percentagens de respostas correctas dos alunos de ambos os grupos nas três questões do subtema e em relação ao pré-teste e ao pós-teste. Destaca-se da figura que no pós-teste os alunos do grupo experimental escolheram mais frequentemente a resposta correcta em todas as questões do subtema, aumentando a diferença entre os dois grupos de 2.a) para 2.b) e de 2.b) para 2.c).

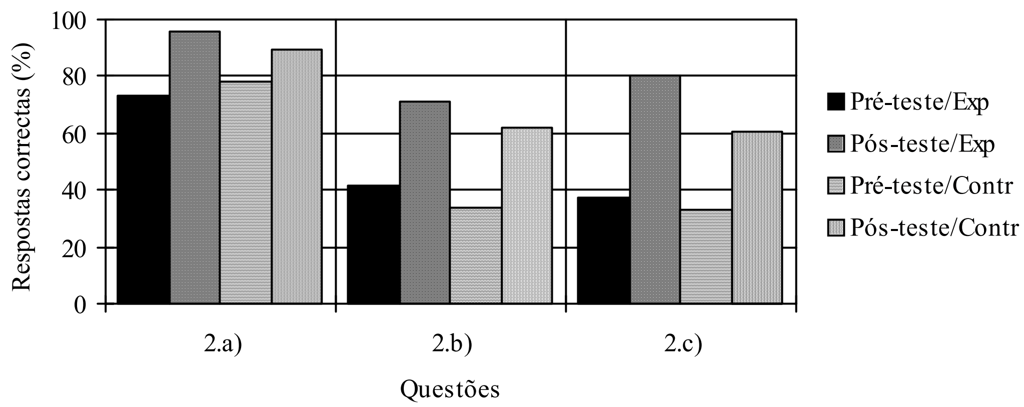


Figura 15. Percentagem de respostas correctas nas questões 2.a), 2.b) e 2.c) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

Globalmente, seriam de esperar estas respostas, pois, na questão 2.a) é igual o número de bolas pretas, na questão 2.b) é diferente o número de bolas de cada cor e a sua razão e na questão 2.c) é diferente o número de bolas de cada cor e é igual a sua razão. No caso da questão 2.c), o elevado número de bolas pretas do saco II, comparativamente com o saco I, dificultou a selecção da resposta correcta.

Tomando, agora, em cada uma das três questões, a percentagem de alunos que referiram no pós-teste os raciocínios *Proporção do número de bolas* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, enquanto 'raciocínios gerais' que garantem a escolha da resposta correcta, verifica-se que as diferenças entre os dois grupos são favoráveis ao grupo experimental em todas as três questões, tal como no caso das respostas (Figura 16).

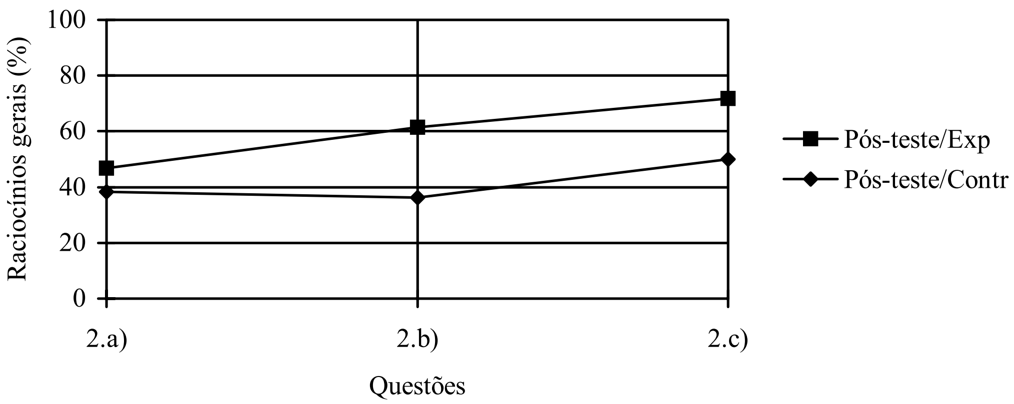


Figura 16. Percentagem de alunos no conjunto dos 'raciocínios gerais' nas questões 2.a), 2.b) e 2.c) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pós-teste.

O aumento da percentagem de alunos nos dois raciocínios considerados ao longo das três questões foi acompanhado da diminuição progressiva na adesão ao raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas*. Este último raciocínio, na questão 2.a) conduziu sempre à escolha da resposta correcta, na questão 2.b) conduziu sempre à selecção de uma resposta errada e na questão 2.c) conduziu a maior parte das vezes à escolha da resposta correcta.

No pós-teste e nas várias questões do subtema, a maior percentagem de alunos do grupo experimental que seleccionaram a resposta correcta deveu-se, principalmente, a uma adesão mais frequente aos raciocínios *Proporção do número de bolas* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*. Em relação ao raciocínio *Proporção do número de bolas*, do pré-teste para o pós-teste, observou-se, sistematicamente, um aumento da sua adopção no grupo experimental e uma diminuição no grupo de controlo.

Finalmente, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis*, de muito pouco referido no pré-teste, deixou de ser mencionado no pós-teste.

C. Probabilidade em experiências simples: contexto de roletas

Neste subtema apresentam-se os resultados obtidos nas questões 3.a), 3.b) e 3.c), inseridas no contexto de uma roleta e em que se comparam as probabilidades de um acontecimento conjunção ou disjunção com um dos seus acontecimentos constituintes.

Questão 3.a). Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter um número maior do que 4* e *Obter um número maior do que 4 e menor do que 7* na experiência de rodar uma roleta dividida em oito partes iguais.

Respostas. Observando as respostas obtidas nesta questão, que constam da Tabela 53, verifica-se que, no pré-teste, a maioria dos alunos de ambos os grupos afirmaram a equiprobabilidade dos dois acontecimentos, seguindo-se a afirmação da maior probabilidade de obter um número maior do que 4.

Tabela 53. Percentagem de alunos nas respostas da questão 3.a) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RESPOSTAS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Obter um número maior do que 4.*	27.8	28.0	89.6	73.5
Obter umnúmero maior doque 4 emenor doque 7.	6.2	5.6	3.1	4.9
É igualmente provável.	66.0	66.4	7.3	21.6

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Diferentemente, no pós-teste inverteu-se a ordem das percentagens de alunos que escolheram estas duas respostas. Em relação à maior probabilidade de obter um número maior do que 4, ela foi afirmada pela maioria dos alunos de ambos os grupos. Quanto à equiprobabilidade dos dois acontecimentos, verificou-se que o grupo de controlo seleccionou esta resposta com uma percentagem consideravelmente superior à do grupo experimental.

Do pré-teste para o pós-teste, verificou-se em ambos os grupos, especialmente no grupo experimental, um aumento da percentagem de alunos que escolheram a resposta correcta e uma diminuição na escolha da igual equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

Tanto no pré-teste como no pós-teste, a maior probabilidade de obter um número maior do que 4 e menor do que 7 foi afirmada por uma pequena percentagem de alunos de ambos os grupos.

Raciocínios. Os raciocínios utilizados pelos alunos para justificarem as respostas são apresentados na Tabela 54. O raciocínio *Não considerar a conjunção*, resultou do cálculo da probabilidade do primeiro acontecimento e conduziu à escolha da resposta correcta. Observou-se que este raciocínio foi referido apenas no pós-teste por alguns alunos do grupo de controlo.

Tabela 54. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 3.a) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RACIOCÍNIOS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Não considerar a conjunção.	0.0	0.0	0.0	5.9
Comparar o número de casos favoráveis.	21.7	21.5	44.8	27.4
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	1.0	0.0	36.5	25.5
Razões causais.	17.5	22.4	0.0	2.0
Ambos os acontecimentos são possíveis.	35.1	39.3	6.2	15.7
Outros.	24.7	16.8	12.5	23.5

No caso do raciocínio, *Comparar o número de casos favoráveis*, ele resultou da comparação do número de casos favoráveis dos dois acontecimentos e conduziu à escolha da resposta correcta. Do pré-teste para o pós-teste, aumentou em ambos os grupos a percentagem de alunos que adoptaram este raciocínio, muito embora este aumento tenha sido mais acentuado no grupo experimental. No caso do pré-teste, observou-se que algumas vezes os alunos não enumeraram os casos favoráveis e, outras vezes, o número de casos favoráveis referido não era exacto.

Também no caso do raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, que resultou de comparar as probabilidades dos acontecimentos, verificou-se que conduziu à selecção da resposta correcta. Excluindo um aluno do grupo experimental no pré-teste, este raciocínio foi referido apenas no pós-teste. Tal como no raciocínio anterior, foram os alunos do grupo experimental que o referiram mais frequentemente.

O raciocínio *Razões causais* levou os alunos, quase sempre, a afirmarem a equiprobabilidade dos dois acontecimentos, a partir de factores causais. A única excepção verificou-se em relação a dois alunos que seleccionaram as outras duas respostas possíveis. Do pré-teste para o pós-teste, a referência a este raciocínio diminuiu drasticamente em ambos os grupos.

Finalmente, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* conduziu a afirmar a equiprobabilidade dos dois acontecimentos a partir do facto de ambos serem possíveis. A possibilidade de realização dos dois acontecimentos baseou-se na impossibilidade de previsão do resultado de uma experiência, da alusão à sorte e do facto de poder sair qualquer número da roleta. Enquanto no pré-teste, este raciocínio foi o mais referido pelos alunos de ambos os grupos, no pós-teste verificou-se uma diminuição considerável da percentagem de alunos que o adoptaram em ambos os grupos, embora maior no grupo experimental.

Relativamente ao pós-teste, a consideração conjunta dos raciocínios *Comparar o número de casos favoráveis* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, enquanto raciocínios que garantem a escolha da resposta correcta, revela que foram os alunos do grupo experimental que os referiram mais frequentemente (pós-teste: *exp* 81.2%, *contr* 52.9%).

Questão 3.b). Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter um número menor do que 5* e *Obter um número menor do que 5 ou ímpar* na experiência de rodar uma roleta dividida em oito partes iguais.

Respostas. As respostas obtidas nesta questão, que constam da Tabela 55, revelam que, no pré-teste e em ambos os grupos, a equiprobabilidade dos dois acontecimentos foi a resposta mais escolhida pelos alunos, seguindo-se a maior probabilidade de obter um número menor do que 5 ou ímpar.

Tabela 55. Percentagem de alunos nas respostas da questão 3.b) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RESPOSTAS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Obter um número menor do que 5.	19.6	14.9	14.6	17.7
Obter um número menor do que 5 ou ímpar.*	22.7	31.8	61.4	53.9
É igualmente provável.	57.7	53.3	24.0	28.4

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

No pós-teste inverteu-se a ordem das percentagens com que os alunos escolheram estas respostas nos dois grupos.

Do pré-teste para o pós-teste, em ambos os grupos, mantiveram-se praticamente as percentagens em relação à maior probabilidade de obter um número menor do que 5, aumentou a percentagem de alunos que afirmaram ser mais provável obter um número menor do que 5 ou ímpar e diminuiu a percentagem de alunos que afirmaram a equiprobabilidade dos dois acontecimentos. Observou-se, ainda, que a diminuição e o aumento das percentagens foi mais acentuado no caso do grupo experimental.

Raciocínios. Quanto aos raciocínios apresentados pelos alunos, que constam da Tabela 56, observou-se um leque mais variado, comparativamente com a questão anterior.

O raciocínio *Substituição do ou pelo e* resultou de substituir a disjunção pela conjunção, o que, coerentemente, levou os alunos a afirmarem ser mais provável obter um número menor do que 5. Do pré-teste para o pós-teste verificou-se um pequeno aumento do número de alunos que aderiram a este raciocínio em ambos os grupos.

Tabela 56. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 3.b) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RACIOCÍNIOS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Substituição do *ou* pelo *e*.	4.1	4.7	7.3	9.8
Multiplicação de probabilidades.	0.0	0.0	3.1	0.0
Não considerar a disjunção.	5.2	2.8	10.4	3.9
Referência à disjunção.	3.1	3.7	13.5	8.8
Comparar o número de casos favoráveis.	13.4	16.8	18.8	20.6
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	1.0	0.0	19.8	16.7
Razões causais.	11.4	13.1	0.0	1.9
Ambos os acontecimentos são possíveis.	34.0	32.7	4.2	16.7
Outros.	27.8	26.2	22.9	21.6

No caso do raciocínio *Multiplicação de probabilidades*, referido apenas no pós-teste por alunos do grupo experimental, ele resultou de multiplicar as probabilidades dos acontecimentos 'obter um número menor do que 5' e 'obter um número ímpar' para concluir a probabilidade do acontecimento 'obter um número menor do que 5 ou ímpar'. Este raciocínio, coerentemente, conduziu à afirmação da maior probabilidade de obter um número menor do que 5.

O raciocínio *Não considerar a disjunção*, referido por ambos os grupos no pré-teste e no pós-teste, resultou da identificação do número de casos favoráveis ou da probabilidade do primeiro acontecimento, ou da comparação do número de ímpares com o de números menores do que 5. No caso do número de casos favoráveis ou da probabilidade do primeiro acontecimento, observou-se que poucos alunos do grupo de controlo afirmaram a maior probabilidade de obter um número menor do que 5 no pós-teste (3.9%). No caso da comparação do número de ímpares com o de números menores que 5, os alunos afirmaram a equiprobabilidade dos dois acontecimentos (pré-teste: *exp* 5.2%, *contr* 2.8%; pós-teste: *exp* 10.4%, *contr* 0.0%). Em geral, do pré-teste para o pós-teste, aumentou ligeiramente o número de alunos que referiram este raciocínio.

A adesão ao raciocínio *Referência à disjunção* explicitou-se através da enumeração dos casos favoráveis dos acontecimentos da disjunção e da alusão à lei da extensão, considerando frequentemente elementos repetidos. Tendo conduzido à resposta correcta, a adesão a este raciocínio aumentou do pré-teste para o pós-teste em ambos os grupos, mas mais marcadamente no grupo experimental.

O raciocínio *Comparar o número de casos favoráveis*, semelhante ao descrito na questão anterior, conduziu à selecção da resposta correcta e, do pré-teste para o pós-teste, observou-se um aumento da percentagem de alunos de ambos os grupos que o referiram. Todavia, no pré-teste alguns alunos de ambos os grupos não enumeraram os casos favoráveis e não identificaram o seu número exacto.

Quanto ao raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, semelhante ao referido na questão anterior, ele também conduziu à resposta correcta. Este raciocínio foi praticamente utilizado apenas no pós-teste, já que no pré-teste apenas um aluno do grupo experimental o referiu.

O raciocínio *Razões causais* levou sempre os alunos a afirmarem a equiprobabilidade dos dois acontecimentos, a partir de factores causais. Do pré-teste para o pós-teste, a referência a este raciocínio diminuiu drasticamente em ambos os grupos.

Por fim, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* conduziu à afirmação da equiprobabilidade dos dois acontecimentos. Tendo sido o raciocínio mais mencionado no pré-teste, verificou-se uma diminuição considerável da percentagem de alunos que o referiram no pós-teste, especialmente no grupo experimental.

Considerando, no pós-teste, os raciocínios *Comparar o número de casos favoráveis* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, enquanto raciocínios que garantem a selecção da resposta correcta, conclui-se que o grupo experimental e o grupo de controlo referiram estes raciocínios com percentagens semelhantes (pós-teste: *exp* 38.6%, *contr* 37.3%). Em consequência, a maior percentagem de respostas correctas do grupo experimental em relação ao grupo de controlo é explicada pelo raciocínio *Referência à disjunção*.

Questão 3.c). Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter um número não par* e *Obter um número menor do que 3 ou não par* na experiência de rodar uma roleta dividida em oito partes iguais.

Respostas. Observando as respostas obtidas nesta questão, que constam da Tabela 57, verifica-se que no pré-teste a maioria dos alunos de ambos os grupos afirmaram a equiprobabilidade dos dois acontecimentos, enquanto no pós-teste a maior probabilidade de obter um número menor do que 3 ou não par foi a resposta mais escolhida.

Tabela 57. Percentagem de alunos nas respostas da questão 3.c) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RESPOSTAS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Obter um número não par.	13.4	21.5	26.0	26.5
Obter um número menor do que 3 ou não par.*	18.6	21.5	59.4	46.1
É igualmente provável.	68.0	57.0	14.6	27.4

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Do pré-teste para o pós-teste, observou-se uma considerável diminuição da percentagem de alunos de ambos os grupos na afirmação da equiprobabilidade dos dois acontecimentos e um aumento da percentagem de alunos que afirmaram ser mais provável obter um número menor do que 3 ou não par. Em ambos os casos, verificou-se, respectivamente, uma diminuição e um aumento mais acentuados no grupo experimental.

Raciocínios. A respeito dos raciocínios que os alunos utilizaram nesta questão, que constam da Tabela 58, observa-se que são semelhantes aos da questão anterior.

No raciocínio *Substituição do ou pelo e* verificou-se que os alunos afirmaram ser mais provável obter um número não par. Do pré-teste para o pós-teste, observou-se um pequeno aumento da percentagem de alunos que recorreram a este raciocínio.

O raciocínio *Multiplicação de probabilidades* explicitou-se através da multiplicação das probabilidades dos acontecimentos 'obter um número não par' e 'obter um número menor do que 3' para determinar a probabilidade do acontecimento 'obter um número menor do que 3 ou não par'. Coerentemente, este raciocínio conduziu à afirmação da maior probabilidade de obter um número não par, o que foi referido apenas por alunos do grupo experimental no pós-teste.

Tabela 58. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 3.c) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RACIOCÍNIOS	PRÉ-TESTE *Exp* (n=97)	PRÉ-TESTE *Contr* (n=107)	PÓS-TESTE *Exp* (n=96)	PÓS-TESTE *Contr* (n=102)
Substituição do *ou* pelo *e*.	4.1	4.7	7.3	13.7
Multiplicação de probabilidades.	0.0	0.0	3.1	0.0
Não considerar a disjunção.	2.1	3.7	4.2	5.9
Referência à disjunção.	1.0	2.8	21.9	8.8
Comparar o número de casos favoráveis.	14.4	14.0	13.5	17.6
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	1.0	0.0	19.8	11.8
Razões causais.	11.4	9.4	0.0	2.0
Ambos os acontecimentos são possíveis.	41.2	34.6	5.2	14.7
Outros.	24.8	30.8	25.0	25.5

O raciocínio *Não considerar a disjunção* resultou da identificação da probabilidade de obter um número não par ou da comparação do número de não pares com o de números menores do que 3. No caso dos alunos que consideraram apenas a probabilidade do primeiro acontecimento, o que aconteceu com apenas um aluno do grupo de controlo no pós-teste, foi afirmada a maior probabilidade desse acontecimento. Todos os outros alunos compararam o número de não pares com o de números menores do que 3, e, coerentemente, afirmaram a maior probabilidade de obter um número não par. Do pré-teste para o pós-teste, verificou-se um ligeiro aumento da percentagem de alunos que referiram este raciocínio.

Tal como na questão anterior, a utilização do raciocínio *Referência à disjunção* conduziu à resposta correcta e, do pré-teste para o pós-teste, verificou-se um aumento do número de alunos que referiram este raciocínio, tendo sido tal aumento mais notório entre os alunos do grupo experimental.

Quanto ao raciocínio *Comparar o número de casos favoráveis*, resultante da comparação do número de casos favoráveis dos dois acontecimentos, verificou-se que conduziu também à selecção da resposta correcta. Muito embora a percentagem de alunos que aderiram a este raciocínio tenha sido semelhante em ambos os grupos no pré-teste e no pós-teste, observou-se, contudo, que no pré-teste alguns alunos de ambos os grupos, tal como nas duas questões anteriores, não enumeraram os casos favoráveis e não identificaram o seu número exacto.

Tal como no raciocínio anterior, a adesão ao raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* levou os alunos a escolherem a resposta correcta. Como se verificou nas duas questões anteriores, este raciocínio foi quase exclusivamente referido no pós-teste por ambos os grupos, já que apenas um aluno do grupo experimental o mencionou no pré-teste. De entre os grupos experimental e de controlo, foi no grupo experimental que o raciocínio foi mais frequentemente referido.

O raciocínio *Razões causais* levou os alunos, quase sempre, a afirmarem a equiprobabilidade dos dois acontecimentos a partir de factores causais. A única excepção verificou-se em relação a dois alunos que afirmaram a maior probabilidade de obter um número não par. Do pré-teste para o pós-teste, a referência a este raciocínio diminuiu drasticamente em ambos os grupos.

Finalmente, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* conduziu à afirmação da equiprobabilidade dos dois acontecimentos. Do pré-teste, em que foi o raciocínio mais mencionado, para o pós-teste, verificou-se uma considerável diminuição do número de alunos que referiram este raciocínio, em especial no grupo experimental.

No pós-teste, considerando conjuntamente os raciocínios *Comparar o número de casos favoráveis* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, enquanto raciocínios que garantem a escolha da resposta correcta, conclui-se que eles foram ligeiramente mais referidos pelo grupo de experimental (pós-teste: *exp* 33.3%, *contr* 29.4%). Tal como na questão anterior, a maior percentagem de alunos do grupo experimental que escolheram a resposta correcta, comparativamente com o grupo de controlo, resultou, também, da maior adesão ao raciocínio *Referência à disjunção*.

Síntese dos resultados nas três questões do subtema. Tomando o número de respostas correctas em ambos os grupos no pós-teste, verificou-se que em todas as questões do subtema o grupo experimental apresentou maiores percentagens de respostas correctas em relação ao grupo de controlo, conforme se pode observar na Figura 17.

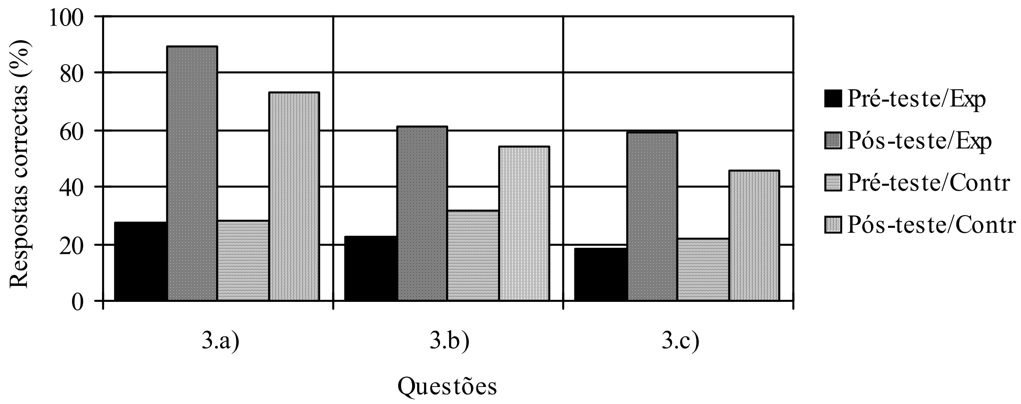


Figura 17. Percentagem de respostas correctas nas questões 3.a), 3.b) e 3.c) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

Muito embora a diferença entre as percentagens dos grupos experimental e de controlo no pós-teste sejam menores na questão 3.b), deve observar-se que no pré-teste a resposta correcta foi consideravelmente mais seleccionada no grupo de controlo.

Considerando, ainda, no pós-teste e em cada uma das três questões deste subtema, a percentagem de alunos de ambos os grupos que referiram conjuntamente os raciocínios *Comparar o número de casos favoráveis* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, enquanto 'raciocínios gerais' que garantem a escolha da resposta correcta, verifica-se que eles foram mais referidos no grupo experimental na questão 3.a) e foram referidos com percentagens semelhantes nas questões 3.b) e 3.c), conforme se observa na Figura 18.

Comparativamente com a questão 3.a), deve recordar-se que nas questões 3.b) e 3.c) a resposta correcta foi também justificada através do raciocínio *Referência à disjunção*. É exactamente a este raciocínio que se devem, fundamentalmente, as maiores percentagens de respostas correctas do grupo experimental nas questões 3.b) e 3.c) no pós-teste.

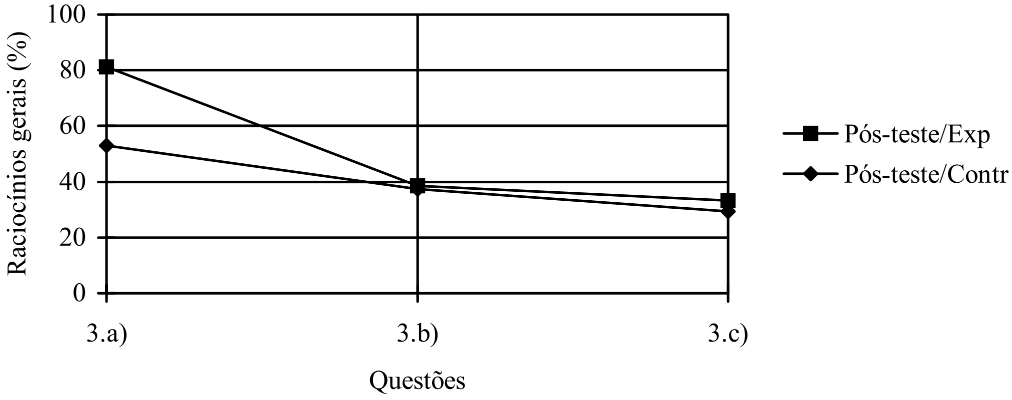


Figura 18. Percentagem de alunos no conjunto dos 'raciocínios gerais' nas questões 3.a), 3.b) e 3.c) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pós-teste.

Destaca-se, também, em todas as questões uma razoável adesão ao raciocínio *Razões causais* no pré-teste, que desapareceu quase completamente no pós-teste.

Por último, do pré-teste para o pós-teste, em todas as questões, verificou-se uma diminuição considerável da percentagem de alunos de ambos os grupos que referiram o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis*, especialmente no grupo experimental.

Nas questões deste subtema incluíram-se conectivos lógicos – na questão 3.a) usou-se o conectivo *e*, na questão 3.b) usou-se o conectivo *ou* e na questões 3.c) usaram-se os conectivos *ou* e *não*. As baixas percentagens de respostas correctas obtidas no pré-teste em todas estas questões, ligeiramente inferiores nas questões 3.b) e 3.c), sugerem que os alunos tiveram dificuldade em interpretar o significado destes conectivos.

D. Probabilidade em experiências compostas: contexto de urnas

Neste subtema apresentam-se os resultados obtidos nas questões 4.a), 4.b) e 4.c), em que se comparam as probabilidades de extrair duas bolas da mesma cor e duas bolas de cores diferentes de um saco com um certo número de bolas brancas e pretas.

Questão 4.a). Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter duas bolas pretas* e *Obter uma bola branca e uma bola preta* na experiência de extracção de uma só vez de duas bolas de um saco, considerando que o saco tem mais uma bola preta do que brancas.

Respostas. As respostas obtidas, que constam da Tabela 59, revelam que em ambos os grupos, no pré-teste, a maior probabilidade de obter duas bolas pretas foi a resposta mais referida, seguindo-se a equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

Tabela 59. Percentagem de alunos nas respostas da questão 4.a) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RESPOSTAS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Obter duas bolas pretas.	48.5	55.1	43.8	61.8
Obter uma bola branca e uma bola preta.*	7.2	17.8	40.6	24.5
É igualmente provável.	44.3	27.1	15.6	13.7

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

No pós-teste, a maior probabilidade de obter duas bolas pretas continua a ser a resposta mais escolhida em ambos os grupos, mas, diferentemente do pré-teste, é a maior probabilidade de obter uma bola branca e uma bola preta a resposta seguidamente mais escolhida.

Do pré-teste para o pós-teste, verificou-se, em relação à maior probabilidade de obter duas bolas pretas, que no grupo experimental diminuiu a percentagem de alunos que escolheram esta resposta e no grupo de controlo aumentou. No caso da maior probabilidade de obter uma bola branca e uma bola preta, observou-se em ambos os grupos um aumento da percentagem de alunos que a afirmaram, mais acentuado no grupo experimental. Por fim, verificou-se uma diminuição em ambos os grupos na afirmação da equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

O facto do grupo experimental ter apresentado simultaneamente a menor percentagem de respostas correctas no pré-teste e a maior percentagem de respostas correctas no pós-teste, significa que as diferenças de percentagens entre o pós-teste e o pré-teste vêm reforçadas para este grupo.

<u>Raciocínios</u>. Quanto aos raciocínios apresentados pelos alunos para justificarem as respostas, e que constam da Tabela 60, verificou-se que ambos os grupos recorreram mais frequentemente ao raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas*, tanto no pré-teste como no pós-teste. A adesão a este raciocínio, conduziu à selecção de cada uma das três respostas possíveis. Quando os alunos observaram que o número de bolas pretas era superior ao número de bolas brancas, o que aconteceu mais frequentemente, eles afirmaram a maior probabilidade de obter duas bolas pretas (pré-teste: *exp* 46.4%, *contr* 51.4%; pós-teste: *exp* 34.4%, *contr* 58.8%); quando os alunos afirmaram que o número de bolas brancas era aproximadamente igual ao número de bolas pretas, eles afirmaram a maior probabilidade de obter uma bola branca e uma bola preta (pré-teste: *exp* 2.1%, *contr* 7.5%; pós-teste: *exp* 4.2%, *contr* 2.0%) ou a equiprobabilidade dos dois acontecimentos (pré-teste: *exp* 10.3%, *contr* 9.3%; pós-teste: *exp* 0.0%, *contr* 1.0%).

Tabela 60. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 4.a) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RACIOCÍNIOS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Comparar o número de bolas brancas e pretas.	58.8	68.2	38.6	61.8
Comparar o número de casos favoráveis.	0.0	0.0	8.3	1.0
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	1.0	0.0	33.3	17.6
Ambos os acontecimentos são possíveis.	28.9	12.2	0.0	3.9
Outros.	11.3	19.6	19.8	15.7

No raciocínio *Comparar o número de casos favoráveis*, referido apenas no pós-teste, verificou-se que conduziu sempre à escolha da resposta correcta e foi referido por mais alunos do grupo experimental, tendo-se verificado que 4.1% de alunos do grupo experimental consideraram a reposição da primeira bola extraída.

Quanto ao raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, que foi praticamente referido apenas no pós-teste, verificou-se que os alunos referiram-no para justificar as três respostas possíveis. A maior probabilidade de obter duas bolas pretas, referida por 5.2% de alunos do grupo experimental no pós-teste, resultou da reposição da primeira bola extraída e da não consideração da ordem das bolas de cor diferente ou da extracção de uma bola, no caso das bolas da mesma cor, e sem considerar a não reposição nem a ordem das bolas de cor diferente. A maior probabilidade de obter uma bola branca e uma bola preta, mais referida no grupo experimental (pós-teste: *exp* 20.8%, *contr* 12.7%), resultou da extracção com ou sem reposição. A extracção com reposição foi considerada por alunos de ambos os grupos (pós-teste: *exp* 1.0%, *contr* 7.8%). No caso da equiprobabilidade dos dois acontecimentos, mais referida no grupo experimental (pós-teste: *exp* 7.3%, *contr* 4.9%), resultou da não consideração da ordem das bolas de cor diferente ou da consideração da ordem das bolas pretas ou da extracção de uma bola, no caso das bolas da mesma cor.

Finalmente, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis*, que resultou da possibilidade de realização dos dois acontecimentos, foi praticamente referido apenas no pré-teste e levou os alunos a afirmarem a equiprobabilidade dos dois acontecimentos. Do pré-teste para o pós-teste, verificou-se uma diminuição na adesão a este raciocínio, mais acentuada no grupo experimental.

No pós-teste, tomando conjuntamente os raciocínios *Comparar o número de casos favoráveis* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, restringidos aos casos em que garantem a selecção da resposta correcta, verifica-se que foram mais os alunos do grupo experimental que os referiram (pós-teste: *exp* 24.0%, *contr* 5.9%).

Questão 4.b). Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter duas bolas brancas* e *Obter uma bola branca e uma bola preta* na experiência de extracção de uma só vez de duas bolas de um saco, considerando que o saco tem igual número de bolas pretas e brancas.

Respostas. As respostas obtidas nesta questão, que são apresentadas na Tabela 61, revelam que a maior probabilidade de obter uma bola branca e uma bola preta e a equiprobabilidade dos dois acontecimentos foram as respostas mais escolhidas pelos alunos de ambos os grupos, quer no pré-teste, quer no pós-teste.

Tabela 61. Percentagem de alunos nas respostas da questão 4.b) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RESPOSTAS	PRÉ-TESTE *Exp* (n=97)	PRÉ-TESTE *Contr* (n=107)	PÓS-TESTE *Exp* (n=96)	PÓS-TESTE *Contr* (n=102)
Obter duas bolas brancas.	1.0	0.0	7.3	0.0
Obter uma bola branca e uma bola preta.*	50.5	50.5	61.5	54.9
É igualmente provável.	48.5	49.5	31.2	45.1

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Do pré-teste para o pós-teste, salienta-se o aumento da percentagem de alunos que escolheram a resposta correcta em ambos os grupos, sendo ligeiramente superior no grupo experimental. Além disso, no grupo experimental, a maior diminuição da percentagem de alunos que afirmaram a equiprobabilidade dos dois acontecimentos foi acompanhada por um maior aumento da afirmação da maior probabilidade de obter duas bolas brancas.

Raciocínios. Em relação aos raciocínios que os alunos utilizaram para justificar as respostas, apresentados na Tabela 62, verifica-se que são idênticos aos referidos na questão anterior.

Quanto ao raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas*, a observação do mesmo número de bolas de ambas as cores, conduziu à afirmação da maior probabilidade de obter uma bola branca e uma bola preta (pré-teste: *exp* 48.5%, *contr* 46.8%; pós-teste: *exp* 27.1%, *contr* 30.4%) ou à afirmação da igual probabilidade dos dois acontecimentos (pré-teste: *exp* 37.1%, *contr* 41.1%; pós-teste: *exp* 26.0%, *contr* 41.2%). Do pré-teste para o pós-teste, observou-se em ambos os grupos uma diminuição da percentagem de alunos que referiram este raciocínio, embora mais acentuada no grupo experimental.

No caso do raciocínio *Comparar o número de casos favoráveis*, referido apenas no pós-teste, verificou-se que todos os alunos escolheram a resposta correcta, tendo 3.1% de alunos do grupo experimental considerado a reposição da primeira bola extraída.

Tabela 62. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 4.b) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RACIOCÍNIOS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Comparar o número de bolas brancas e pretas.	85.6	87.9	53.1	71.6
Comparar o número de casos favoráveis.	0.0	0.0	7.3	1.0
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	1.0	0.0	31.3	17.6
Ambos os acontecimentos são possíveis.	7.2	3.7	0.0	0.0
Outros.	6.2	8.4	8.3	9.8

O raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, quase exclusivamente referido no pós-teste, levou os alunos a escolheram as três respostas possíveis. No caso da maior probabilidade de obter duas bolas brancas, escolhida por 3.1% de alunos do grupo experimental, observou-se que consideraram a extracção de apenas uma bola, no caso das bolas da mesma cor, a reposição da primeira bola extraída e não consideraram a ordem das bolas de cor diferente. Quanto à resposta correcta (pós-teste: *exp* 25.0%, *contr* 17.6%), verificou-se que alguns destes alunos não consideraram a ordem nas bolas de cor diferente ou consideraram a ordem nas duas bolas brancas ou a reposição da primeira bola extraída ou a extracção de uma bola no caso das bolas da mesma cor (pós-teste: *exp* 6.3%, *contr* 12.7%). A equiprobabilidade dos dois acontecimentos, escolhida por 3.1% de alunos do grupo experimental, resultou da reposição da primeira bola extraída e da não consideração da ordem das bolas de cor diferente.

Por último, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* foi referido apenas no pré-teste e conduziu sempre à resposta de igual probabilidade dos acontecimentos.

No pós-teste, restringindo os raciocínios *Comparar o número de casos favoráveis* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* aos casos em que garantem a selecção da resposta correcta, conclui-se que, conjuntamente, foram mais frequentemente referidos no grupo experimental do que no grupo de controlo (pós-teste: *exp* 22.9%, *contr* 5.9%).

Questão 4.c). Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter duas bolas brancas* e *Obter uma bola branca e uma bola preta* na experiência de extracção de uma só vez de duas bolas de um saco, considerando que o saco tem um número de bolas brancas muito superior ao de bolas pretas.

Respostas. Observando as respostas obtidas nesta questão, que constam da Tabela 63, verifica-se que, tanto no pré-teste como no pós-teste, a grande maioria dos alunos do grupo experimental e de controlo afirmaram a maior probabilidade de obter duas bolas brancas. Em percentagem, seguidamente, os alunos de ambos os grupos escolheram a resposta de igual probabilidade dos dois acontecimentos.

Tabela 63. Percentagem de alunos nas respostas da questão 4.c) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RESPOSTAS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Obter duas bolas brancas.	91.8	91.6	79.2	90.2
Obter uma bola branca e uma bola preta.	1.0	1.9	2.1	2.0
É igualmente provável.*	7.2	6.5	18.7	7.8

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Do pré-teste para o pós-teste, em relação ao grupo experimental, observou-se uma diminuição da percentagem de alunos que afirmaram a maior probabilidade de obter duas bolas brancas e um aumento da percentagem de alunos que afirmaram a equiprobabilidade dos dois acontecimentos. No caso do grupo de controlo, estas percentagens mantiveram-se semelhantes do pré-teste para o pós-teste.

Raciocínios. Quanto aos raciocínios referidos pelos alunos para justificarem as respostas, apresentados na Tabela 64, verificou-se que são semelhantes àqueles que foram referidos nas duas questões anteriores.

A adesão ao raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas*, que resultou do facto do número de bolas brancas ser superior ao número de bolas pretas, conduziu à afirmação da maior probabilidade de obter duas bolas brancas. Observou-se, do pré-teste para o pós-teste, uma diminuição da percentagem de alunos que o referiram em ambos os grupos, com maior incidência no grupo experimental.

Tabela 64. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 4.c) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RACIOCÍNIOS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Comparar o número de bolas brancas e pretas.	89.7	90.7	59.4	77.4
Comparar o número de casos favoráveis.	0.0	0.0	2.1	1.0
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	1.0	0.0	30.2	15.7
Ambos os acontecimentos são possíveis.	3.1	5.6	0.0	0.0
Outros.	6.2	3.7	8.3	5.9

O raciocínio *Comparar o número de casos favoráveis*, referido apenas no pós-teste por muito poucos alunos de ambos os grupos, conduziu à escolha da resposta correcta.

Já no caso do raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, quase exclusivamente referido no pós-teste, verificou-se que conduziu à afirmação da maior probabilidade de obter duas bolas brancas e à equiprobabilidade dos dois acontecimentos. No caso da maior probabilidade de obter duas bolas brancas, referida no pós-teste (pós-teste: *exp* 15.6%, *contr* 10.8%), observou-se que os alunos não consideraram a ordem nas bolas de cor diferente ou consideraram a ordem nas duas bolas brancas ou a extracção de uma bola, no caso das bolas da mesma cor, ou a reposição da primeira bola extraída. Quanto à igual probabilidade dos dois acontecimentos, que é a resposta correcta, verificou-se que foi mais frequentemente referida pelo grupo experimental do que pelo grupo de controlo (pós-teste: *exp* 14.6%, *contr* 4.9%).

Por fim, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* foi referido apenas no pré-teste e conduziu à afirmação da equiprobabilidade dos dois acontecimentos.

No pós-teste, restringindo os raciocínios *Comparar o número de casos favoráveis* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* aos casos em que garantem a selecção da resposta correcta, conclui-se que, conjuntamente, foram mais frequentemente referidos no grupo experimental do que no grupo de controlo (pós-teste: *exp* 16.7%, *contr* 5.9%).

Síntese dos resultados nas três questões do subtema. Considerando as percentagens de respostas correctas no pós-teste, em cada uma das três perguntas deste subtema, verifica-se que a percentagem de alunos do grupo experimental que seleccionaram a resposta correcta foi superior, em relação ao grupo de controlo, em todas as três questões, como se mostra na Figura 19.

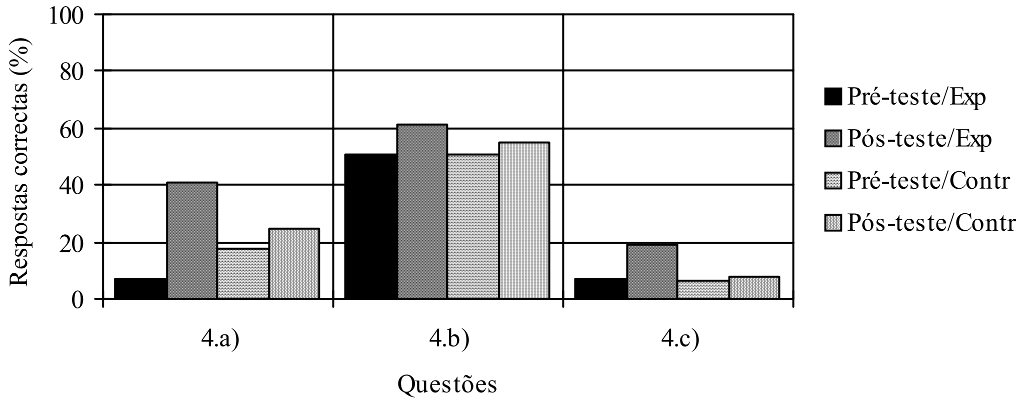


Figura 19. Percentagem de respostas correctas nas questões 4.a), 4.b) e 4.c) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

Também em termos das diferenças entre o número de respostas correctas no pós-teste e no pré-teste, observa-se que elas foram sempre favoráveis ao grupo experimental, especialmente na questão 4.a).

No pós-teste, consideraram-se, em cada uma das três questões deste subtema, em conjunto, os raciocínios *Comparar o número de casos favoráveis* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, restringidos aos casos em que garantem a selecção da resposta correcta. Estes raciocínios, designados por 'raciocínios gerais', foram mais frequentemente referidos pelos alunos do grupo experimental em todas as questões, como se verifica na Figura 20.

Relativamente à questão 4.a), a maior percentagem de respostas correctas na questão 4.b) deve-se, em grande parte, à justificação mais frequente da resposta correcta a partir do raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas*. No caso da questão 4.c), em que é menor ainda a percentagem de respostas correctas, este raciocínio nunca foi referido para explicar a resposta correcta. Além disso, nesta última questão, a não consideração da ordem das bolas no raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* conduziu à escolha de uma resposta errada.

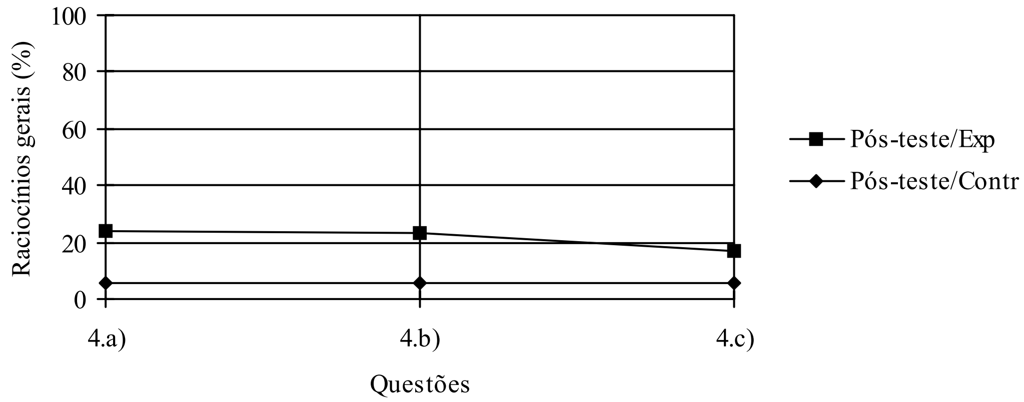


Figura 20. Percentagem de alunos no conjunto dos 'raciocínios gerais' nas questões 4.a), 4.b) e 4.c) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pós-teste.

Em geral, nas questões deste subtema a diminuição na adesão a 'raciocínios gerais' foi muito influenciada pela não consideração da ordem e pela reposição da primeira bola extraída.

Finalmente, salienta-se o facto do raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* não ter sido quase nunca referido no pós-teste. A única excepção ocorreu no grupo de controlo na questão 4.a), na qual se verificou a maior adesão a este raciocínio no pré-teste.

E. Probabilidade em experiências compostas: contexto de dados

Neste subtema apresentam-se os resultados obtidos nas questões 5.a), 5.b) e 5.c), em que se comparam as probabilidades de obter duas somas diferentes no lançamento de dois dados.

Questão 5.a). Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter a soma 3* e *Obter a soma 6* na experiência de lançamento de dois dados, considerando que se somam os pontos dos dados.

<u>Respostas</u>. As respostas obtidas, que constam da Tabela 65, revelam que a maioria dos alunos de ambos os grupos afirmaram ter mais chances de ganhar com a soma 6, quer no pré-teste, quer no pós-teste.

Tabela 65. Percentagem de alunos nas respostas da questão 5.a) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RESPOSTAS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Soma 3.	1.0	1.9	2.1	3.9
Soma 6.*	83.5	68.2	94.8	72.6
Chances iguais.	15.5	29.9	3.1	23.5

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Tanto no pré-teste como no pós-teste, observou-se que foram os alunos do grupo experimental que seleccionaram a resposta correcta mais frequentemente. No caso da afirmação de chances iguais para as duas somas, verificou-se que foi o grupo de controlo que a seleccionou mais frequentemente, também no pré-teste e no pós-teste.

Do pré-teste para o pós-teste, em ambos os grupos, aumentou a percentagem de alunos que escolheram a resposta correcta e e diminuiu a percentagem de alunos que afirmaram chances iguais para as duas somas, especialmente no grupo experimental.

<u>Raciocínios</u>. Em relação aos raciocínios utilizados pelos alunos, que podem ser observados na Tabela 66, verificou-se que o raciocínio *Comparar as duas somas* foi o mais referido no pré-teste por ambos os grupos de alunos. Este raciocínio, baseado na observação de que a soma 6 é maior do que a soma 3, conduziu à escolha da soma 6. Do pré-teste para o pós-teste, verificou-se uma grande diminuição na percentagem de alunos que aderiram a este raciocínio, particularmente no grupo experimental.

Diferentemente, no pós-teste, foi o raciocínio *Comparar o número de casos favoráveis* o mais referido. Embora este raciocínio tenha conduzido à escolha da soma 6, verificou-se que tal se baseou muitas vezes em informação incompleta. Assim, alguns alunos não mencionaram os casos favoráveis nem o seu número (pré-teste: *exp* 8.2%, *contr* 11.2%; pós-teste: *exp* 0.0%, *contr* 3.9%), outros não consideraram a ordem nos casos favoráveis (pré-teste: *exp* 10.3%, *contr* 6.5%; pós-teste: *exp* 8.3%, *contr* 28.4%) e, apenas no pré-teste, alguns enumeraram parcialmente os casos favoráveis (pré-teste: *exp* 3.1%, *contr* 11.2%).

Tabela 66. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 5.a) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RACIOCÍNIOS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Comparar as duas somas.	52.6	33.6	4.2	16.7
Comparar o número de casos favoráveis.	23.7	29.0	46.9	40.2
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	0.0	0.0	41.6	11.7
Ambos os acontecimentos são possíveis.	8.2	17.8	0.0	14.7
Outros.	15.5	19.6	7.3	16.7

O raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, que conduziu à escolha da soma 6, foi referido apenas no pós-teste por ambos os grupos e por uma percentagem consideravelmente maior de alunos do grupo experimental.

Finalmente, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis*, resultante da possibilidade de realização dos dois acontecimentos, foi referido com maior frequência pelos alunos do grupo de controlo, tanto no pré-teste como no pós-teste. Do pré-teste para o pós-teste, verificou-se uma diminuição da percentagem de alunos que aderiram a este raciocínio em ambos os grupos.

No caso do pós-teste, considerando conjuntamente os raciocínios *Comparar o número de casos favoráveis* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, restringidos aos casos em que garantem a selecção da resposta correcta, verifica-se que os alunos do grupo experimental recorreram muito mais frequentemente a estes raciocínios (pós-teste: *exp* 80.2%, *contr* 19.6%).

Questão 5.b). Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter a soma 4* e *Obter a soma 5* na experiência de lançamento de dois dados, considerando que se somam os pontos dos dados.

<u>Respostas</u>. As respostas obtidas nesta questão, que constam da Tabela 67, mostram

que, no pré-teste, os alunos de ambos os grupos afirmaram mais frequentemente haver mais chances com a soma 5 e que as chances eram iguais com as duas somas. Enquanto no grupo experimental estas duas respostas foram escolhidas com a mesma percentagem, no grupo de controlo os alunos afirmaram mais frequentemente que as chances eram iguais para as duas somas.

Tabela 67. Percentagem de alunos nas respostas da questão 5.b) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RESPOSTAS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Soma 4.	3.0	6.5	2.1	6.9
Soma 5.*	48.5	32.7	88.5	43.1
Chances iguais.	48.5	60.8	9.4	50.0

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

No pós-teste, os alunos do grupo experimental afirmaram mais frequentemente haver mais chances com a soma 5 e os alunos do grupo de controlo afirmaram mais frequentemente que as chances eram iguais com as duas somas. No caso do grupo de controlo, uma considerável percentagem de alunos afirmou que as chances eram maiores com a soma 5.

Do pré-teste para o pós-teste, observou-se em ambos os grupos um aumento da percentagem de alunos que escolheram a resposta correcta e uma diminuição da percentagem de alunos que afirmaram chances iguais para as duas somas, em ambos os casos mais acentuada no grupo experimental.

Raciocínios. Em relação aos raciocínios referidos pelos alunos, apresentados na Tabela 68, verifica-se que são idênticos aos que foram indicados na questão anterior.

O raciocínio *Comparar as duas somas* conduziu, nesta questão, à afirmação de que as chances eram maiores para a soma 5 ou que as chances eram iguais para as duas somas. No caso da afirmação de maiores chances para a soma 5, os alunos observaram que a soma 5 é maior do que a soma 4 (pré-teste: *exp* 36.1%, *contr* 16.8%; pós-teste: *exp* 4.2%, *contr* 13.7%); no caso da afirmação de chances iguais para as duas somas, os alunos observaram que as somas eram aproximadamente iguais (pré-teste: *exp* 15.4%, *contr* 15.9%; pós-teste: *exp* 0.0%, *contr* 3.9%).

Tabela 68. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 5.b) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RACIOCÍNIOS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Comparar as duas somas.	51.5	32.7	4.2	17.6
Comparar o número de casos favoráveis.	18.6	27.1	41.7	36.3
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	0.0	0.0	42.7	10.8
Ambos os acontecimentos são possíveis.	10.3	18.7	0.0	12.7
Outros.	19.6	21.5	11.4	22.6

No caso do raciocínio *Comparar o número de casos favoráveis* verificou-se que os alunos afirmaram haver mais chances com a soma 5 ou chances iguais com as duas somas. Quando os alunos não mencionaram os casos favoráveis nem o seu número, observou-se que os alunos afirmaram haver mais chances na soma 5 (pré-teste: *exp* 5.2%, *contr* 10.3%; pós-teste: *exp* 0.0%, *contr* 3.9%) ou afirmaram, apenas no pré-teste, chances iguais para as duas somas (pré-teste: *exp* 2.1%, *contr* 3.7%). A enumeração parcial dos casos favoráveis, levou 0.9% de alunos do grupo de controlo, no pré-teste, a afirmar a maior chance para a soma 5. Por último, a não consideração da ordem nos casos favoráveis, levou os alunos a afirmarem chances iguais para as duas somas (pré-teste: *exp* 10.3%, *contr* 12.2%; pós-teste: *exp* 4.2%, *contr* 25.5%). Do pré-teste para o pós-teste, observou-se um aumento da percentagem de alunos que aderiram a este raciocínio em ambos os grupos, mais acentuada no grupo experimental.

O raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, apenas referido no pós-teste por ambos os grupos, conduziu à selecção da resposta correcta. De entre os dois grupos, claramente os alunos do grupo experimental adoptaram mais frequentemente este raciocínio.

Por fim, o raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* foi referido por alunos de ambos os grupos no pré-teste e apenas por alunos do grupo de controlo no pós-teste.

Do pré-teste para o pós-teste, a percentagem de alunos que adoptaram este raciocínio diminuiu no grupo experimental e não se alterou muito no grupo de controlo.

No caso do pós-teste, considerando conjuntamente os raciocínios *Comparar o número de casos favoráveis* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, restringidos aos casos em que garantem a selecção da resposta correcta, verifica-se que os alunos do grupo experimental recorreram muito mais frequentemente a estes raciocínios (pós-teste: *exp* 80.2%, *contr* 17.7%).

Questão 5.c). Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter a soma 3* e *Obter a soma 11* na experiência de lançamento de dois dados, considerando que se somam os pontos dos dados.

Respostas. As respostas obtidas nesta questão, que constam da Tabela 69, revelam que ambos os grupos afirmaram haver mais chances com a soma 11, no pré-teste, e chances iguais com as duas somas, no pós-teste. Em ambos os casos, à resposta mais frequentemente seleccionada, seguiu-se a afirmação de chances iguais para as duas somas e maiores chances para a soma 11, respectivamente.

Tabela 69. Percentagem de alunos nas respostas da questão 5.c) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RESPOSTAS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Soma 3.	4.1	10.3	6.2	6.9
Soma 11.	66.0	50.5	14.6	25.5
Chances iguais.*	29.9	39.2	79.2	67.6

Nota – A resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Do pré-teste para o pós-teste, verificou-se um aumento da percentagem de alunos de ambos os grupos que escolheram a resposta correcta e uma diminuição da percentagem de alunos que afirmaram maiores chances para a soma 11, sendo estas variações mais acentuadas no grupo experimental.

Raciocínios. Relativamente aos raciocínios referidos nesta questão, que são apresentados na Tabela 70, observa-se que são idênticos aos mencionados nas duas questões anteriores.

Tabela 70. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 5.c) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

RACIOCÍNIOS	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	Exp (n=97)	*Contr* (n=107)	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)
Comparar as duas somas.	51.6	32.7	5.2	16.6
Comparar o número de casos favoráveis.	23.7	31.8	42.7	40.2
Comparar as probabilidades dos acontecimentos.	0.0	0.0	39.6	11.8
Ambos os acontecimentos são possíveis.	10.3	13.1	0.0	11.8
Outros.	14.4	22.4	12.5	19.6

Quanto ao raciocínio *Comparar as duas somas*, verificou-se que conduziu à afirmação de maiores chances para a soma 11 (pré-teste: *exp* 47.4%, *contr* 30.8; pós-teste: *exp* 5.2%, *contr* 16.6%) ou à afirmação, apenas no pré-teste, de chances iguais para as duas somas (pré-teste: *exp* 4.2%, *contr* 1.9%). No caso de maiores chances para a soma 11, os alunos observaram que a soma 11 é maior que a soma 3; no caso de chances iguais para as duas somas, os alunos observaram que o número 3 é muito baixo e o número 11 é muito alto. Neste último caso, parece que os alunos consideraram os valores das somas máxima e mínima e a simetria da distribuição das somas.

O raciocínio *Comparar o número de casos favoráveis* levou os alunos a afirmarem maiores chances para a soma 3 ou chances iguais para as duas somas. Contudo, muitas vezes este raciocínio foi referido na base de informação incompleta ou descontextualizada. Assim, no caso de maiores chances para a soma 11, verificou-se que os alunos saíram do contexto do dado, ao referirem somas com parcelas superiores a 6 (pré-teste: *exp* 5.2%, *contr* 4.7%; pós-teste: *exp* 4.2%, *contr* 2.0%), ou não mencionaram os casos favoráveis nem o seu número (pré-teste: *exp* 8.2%, *contr* 9.3%; pós-teste: *exp* 0.0%, *contr* 2.0%). No caso de chances iguais para as duas somas, os alunos não consideraram a ordem dos casos favoráveis (pré-teste: *exp* 8.2%, *contr* 14.1%; pós-teste: *exp* 5.2%, *contr* 26.5%) ou, apenas no pré-teste, não mencionaram os casos favoráveis nem o seu número (pré-teste: *exp* 1.0%, *contr* 3.7%). Do pré-teste para o pós-teste, observou-se um aumento da percentagem de alunos que aderiram a este raciocínio em ambos os grupos, sendo esse aumento mais acentuado no grupo experimental.

Já no caso do raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, referido apenas no pós-teste, verificou-se que conduziu apenas à selecção da resposta correcta. De entre ambos os grupos, observou-se que no grupo experimental este raciocínio foi mencionado por uma percentagem de alunos consideravelmente superior.

Finalmente, o racicoínio *Ambos os acontecimentos são possíveis* foi referido por ambos os grupos no pré-teste e apenas por alunos do grupo de controlo no pós-teste. Do pré-teste para o pós-teste, a adesão a este raciocínio diminuiu no grupo experimental e quase não se alterou no grupo de controlo.

No caso do pós-teste, considerando conjuntamente os raciocínios *Comparar o número de casos favoráveis* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, restingidos aos casos em que garantem a selecção da resposta correcta, verifica-se que os alunos do grupo experimental recorreram muito mais frequentemente a estes raciocínios (pós-teste: *exp* 72.9%, *contr* 21.5%).

Síntese dos resultados nas três questões do subtema. Considerando as percentagens de respostas correctas no pós-teste, em cada uma das três questões deste subtema, verificou-se que o grupo experimental escolheu mais frequentemente a resposta correcta em todas elas, como se pode verificar pela Figura 21.

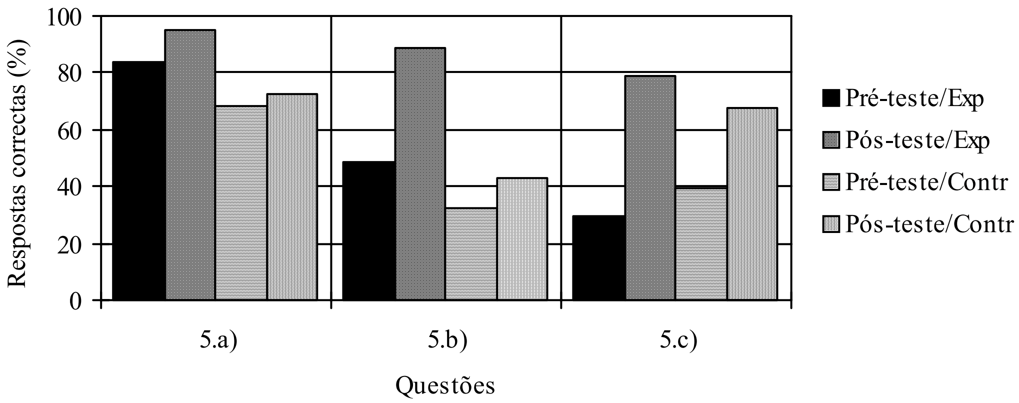


Figura 21. Percentagem de respostas correctas nas questões 5.a), 5.b) e 5.c) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pré-teste e pós-teste.

Muito embora nas questões 5.a) e 5.b) as respostas correctas tenham sido seleccionadas no pré-teste por uma maior percentagem de alunos do grupo experimental, as diferenças entre o pós-teste e o pré-teste ainda são favoráveis a este grupo.

Em relação ao pós-teste, consideraram-se, em cada uma das três questões deste subtema, em conjunto, os raciocínios *Comparar o número de casos favoráveis* e *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, restringidos aos casos em que garantem a escolha da resposta correcta. Observando a Figura 22, verifica-se que estes raciocínios, designados por 'raciocínios gerais', foram muito mais frequentemente referidos pelos alunos do grupo experimental em todas as questões.

No pós-teste, as maiores percentagens de respostas correctas obtidas no grupo experimental em todas as questões deste subtema são explicadas, fundamentalmente, pelo raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*. No grupo de controlo, uma percentagem considerável de alunos seleccionaram a resposta correcta a partir dos raciocínios *Comparar as somas* nas questões 5.a) e 5.b). Recorde-se que na questão 5.c) este raciocínio conduziu sempre à escolha da resposta errada. Subjacente a este último raciocínio, parece ter estado a ideia de que haveria mais chances de ganhar (num jogo) com um número maior, como foi referido por alguns alunos.

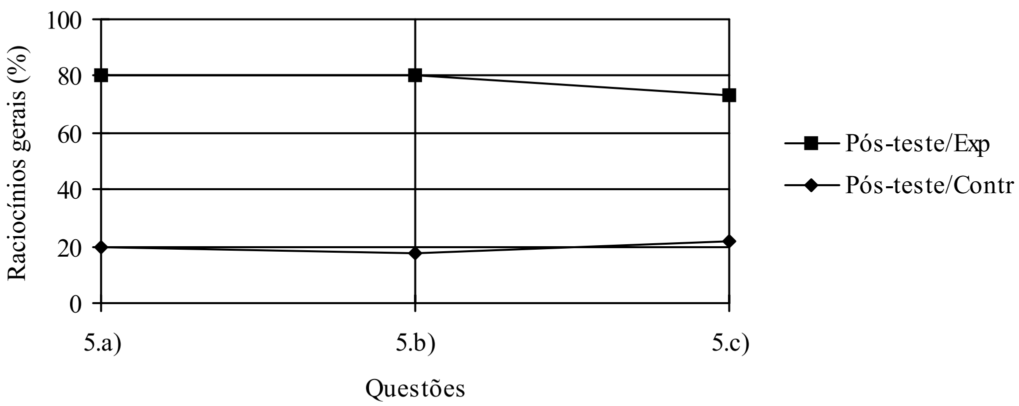


Figura 22. Percentagem de alunos no conjunto dos 'raciocínios gerais' nas questões 5.a), 5.b) e 5.c) por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) no pós-teste.

Ainda no pós-teste, destaca-se que uma maior percentagem de alunos do grupo de controlo não consideraram a ordem no raciocínio *Comparar o número de casos* *favoráveis* nas questões 5.a) e 5.c).

Por fim, em relação ao raciocínio *Ambos os acontecimentos são possíveis*, verificou-se que nenhum aluno do grupo experimental o referiu no pós-teste em qualquer das questões, muito embora uma considerável percentagem destes alunos o tenham mencionado no pré-teste. Já no grupo de controlo, do pré-teste para o pós-teste, observou-se em todas as questões apenas uma ligeira diminuição das percentagens de alunos que aderiram a este raciocínio.

4.3.2. Respostas correctas

Nesta subsecção estudam-se as respostas correctas a partir das variáveis: (A) metodologia de ensino, (B) desempenho em matemática e (C) sexo.

A. Metodologia de ensino

O estudo das respostas correctas foi efectuado em cada questão, nos subtemas e no questionário, considerando os dois momentos de passagem do questionário (pré-teste e pós-teste) e os dois grupos de alunos envolvidos (experimental e controlo).

Observando a Tabela 71, verifica-se que, no pós-teste, o grupo experimental obteve em todas as questões uma percentagem de respostas correctas superior ao grupo de controlo. Em termos de significância estatística, a aplicação do teste χ^2 com correcção de continuidade à tabela de contingência de 2×2, definida pelas frequências das respostas correctas e erradas em cada um dos grupos, determinou diferenças entre os dois grupos em oito das 15 questões, especificamente nas questões: 1.a), 1.c), 2.c), 3.a), 4.a), 4.c), 5.a) e 5.b).

Considerando o número de respostas correctas em cada um dos cinco subtemas, em que se incluem as questões, o teste de Mann-Whitney determinou diferenças estatisticamente significativas em todos eles ($p<0.05$ nos subtemas ‘Probabilidade em experiências simples: contexto de roletas’ e ‘Probabilidade em experiências compostas: contexto de urnas’ e $p<0.01$ nos restantes subtemas). Também em relação ao número total de respostas correctas no questionário, o teste de Mann-Whitney determinou diferenças estatisticamente significativas entre os grupos ($p<0.01$). Em todos os casos as diferenças foram favoráveis ao grupo experimental.

Tabela 71. Percentagem de respostas correctas no pré-teste e pós-teste por grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*) em cada questão, valor de χ^2 em cada questão e valor de Z por subtema e no questionário.

SUBTEMA	QUESTÕES	PRÉ-TESTE				PÓS-TESTE			
		Exp (n=97)	*Contr* (n=107)[1]	$\chi^{2(2)}$	$Z^{(3)}$	*Exp* (n=96)	*Contr* (n=102)	$\chi^{2(2)}$	$Z^{(3)}$
Acontecimentos quase certos e quase impossíveis: contexto de moedas.	1.a)	52.6	53.3	0.002		89.6	59.8	21.403**	
	1.b)	68.0	65.1	0.087		69.8	60.8	1.393	
	1.c)	51.0	55.1	0.051		91.7	69.6	13.851**	
	Média das ordens	102.5	102.5		0.009	116.5	83.5		4.350**
Probabilidade em experiências simples: contexto de urnas.	2.a)	73.2	78.5	0.522		95.8	89.2	2.220	
	2.b)	41.2	34.0	0.855		70.8	61.8	1.434	
	2.c)	37.1	33.0	0.215		80.2	60.8	8.015**	
	Média das ordens	105.2	100.1		0.682	111.3	88.4		3.072**
Probabilidade em experiências simples: contexto de roletas.	3.a)	27.8	28.0	0.015		89.6	73.5	7.365**	
	3.b)	22.7	31.8	1.681		61.5	53.9	0.862	
	3.c)	18.6	21.5	0.121		59.4	46.1	2.993	
	Média das ordens	98.9	105.7		0.924	108.3	91.2		2.215*
Probabilidade em experiências compostas: contexto de urnas.	4.a)	7.2	17.8	4.179		40.6	24.5	5.158*	
	4.b)	50.5	50.5	0.018		61.5	54.9	0.625	
	4.c)	7.2	7.2	0.008		18.8	7.8	4.246*	
	Média das ordens	98.6	106.1		1.021	108.4	91.1		2.237*
Probabilidade em experiências compostas: contexto de dados.	5.a)	83.5	68.2	5.621*		94.8	72.5	16.051**	
	5.b)	48.5	32.7	4.611*		88.5	43.1	42.927**	
	5.c)	29.9	39.3	1.572		79.2	67.6	2.786	
	Média das ordens	111.3	94.6		2.240*	127.5	73.2		7.199**
Questionário	Média das ordens	102.5	102.5		0.005	123.1	77.3		5.651**

Nota – [1]Nas questões 1.b), 2.b) e 2.c) n=106. [2]Valor de χ^2 com correcção de continuidade. [3]Valor de Z corrigido para repetições. *Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.05$. **Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.01$.

Observando os resultados do pré-teste, verifica-se que, enquanto nos primeiros quatro subtemas o teste de Mann-Whitney não determinou diferenças estatisticamente significativas, o mesmo não aconteceu no subtema 'Probabilidade em experiências compostas: contexto de dados'. Neste caso, observaram-se diferenças estatisticamente significativas favoráveis ao grupo experimental. Com o fim de avaliar o impacto desta superioridade do grupo experimental no pré-teste sobre o pós-teste, determinou-se, para cada aluno, a diferença entre o número de respostas correctas no pós-teste e no pré-teste e aplicou-se, seguidamente, o teste de Mann-Whitney. Ainda neste caso, obtiveram-se diferenças estatisticamente significativas favoráveis ao grupo experimental ($p<0.01$).

Efectuada uma análise de variância de dois factores com medidas repetidas, tomando as variáveis metodologia de ensino e respostas correctas no pré-teste e no pós-teste, verificaram-se diferenças estatisticamente significativas na variável metodologia de ensino ($p<0.01$), na variável respostas correctas ($p<0.01$) e uma interacção significativa entre as variáveis ($p<0.01$). Estes resultados permitem concluir que, entre o pré-teste e o pós-teste, o grupo experimental progrediu claramente mais do que o grupo de controlo.

B. Desempenho em matemática

Considerando a soma das notas dos alunos no 3º período do 8º ano e no 1º período do 9º ano, a aplicação do teste t de Student não determinou diferenças estatisticamente significativas entre as médias obtidas no grupo experimental e no grupo de controlo ($t=0.176$). Depois de codificado o desempenho em matemática em baixo, médio e elevado, também a aplicação do teste χ^2 à tabela de contingência de 2×3 não determinou diferenças estatisticamente significativas entre os dois grupos ($\chi^2=3.299$), relativamente ao número de respostas correctas e erradas dos dois grupos no pré-teste.

Relativamente ao pós-teste, observando a Tabela 72, conclui-se que no grupo experimental ao maior desempenho em matemática correspondeu um aumento sistemático do número de respostas correctas em todos os subtemas e no questionário.

Em termos de significância estatística, o teste de Kruskal-Wallis determinou diferenças no questionário ($p<0.01$) e em todos os subtemas considerados ($p<0.01$), exceptuando o subtema 'Acontecimentos quase certos e quase impossíveis: contexto de moedas'.

Tabela 72. Média das ordens segundo o desempenho em matemática e valor de H em cada subtema e no questionário, em relação às respostas correctas do grupo experimental no pós-teste.

SUBTEMAS	QUESTÕES	PÓS-TESTE – EXPERIMENTAL			
		Média segundo o desempenho			Valor de H[1]
		Baixo (n=29)	Médio (n=42)	Elevado (n=25)	
Acontecimentos quase certos e quase impossíveis: contexto de moedas.	1	43.9	47.0	56.2	3.693
Probabilidade em experiências simples: contexto de urnas.	2	32.6	51.2	62.5	21.276**
Probabilidade em experiências simples: contexto de roletas.	3	35.5	51.3	58.9	11.710**
Probabilidade em experiências compostas: contexto de urnas.	4	39.9	46.4	61.9	9.625**
Probabilidade em experiências compostas: contexto de dados.	5	34.2	52.0	59.2	20.489**
Questionário	1 a 5	29.3	49.3	69.4	28.213**

Nota – [1] Valor de H corrigido para repetições. *Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.05$. **Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.01$.

Tal como no grupo experimental, também no grupo de controlo se verificou que ao melhor desempenho em matemática correspondeu sistematicamente um número de respostas correctas superior, como se conclui da Tabela 73. Em termos de significância estatística, o teste de Kruskal-Wallis determinou diferenças no questionário ($p<0.01$) e em todos os subtemas considerados ($p<0.01$), excepto no subtema 'Acontecimentos quase certos e quase impossíveis: contexto de moedas'.

No caso do subtema 'Acontecimentos quase certos e quase impossíveis: contexto de moedas', deve observar-se que ele não foi objecto de estudo nas aulas com base no cálculo de probabilidades, quer no grupo experimental, quer no grupo de controlo.

Tabela 73. Média das ordens segundo o desempenho em matemática e valor de H em cada subtema e no questionário, em relação às respostas correctas do grupo de controlo no pós-teste.

SUBTEMAS	QUESTÕES	PÓS-TESTE – CONTROLO			
		Média segundo o desempenho			Valor de H(1)
		Baixo (n=41)	Médio (n=31)	Elevado (n=30)	
Acontecimentos quase certos e quase impossíveis: contexto de moedas.	1	45.6	52.1	59.0	3.955
Probabilidade em experiências simples: contexto de urnas.	2	41.8	49.8	66.6	13.891**
Probabilidade em experiências simples: contexto de roletas.	3	41.3	51.1	65.9	13.225**
Probabilidade em experiências compostas: contexto de urnas.	4	46.2	47.2	63.2	7.726*
Probabilidade em experiências compostas: contexto de dados.	5	39.7	55.8	63.1	13.681**
Questionário	1 a 5	35.9	51.9	72.5	26.891**

Nota – (1) Valor de H corrigido para repetições. *Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.05$. **Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.01$.

Efectuada uma análise de variância de dois factores com medidas repetidas, tomando as variáveis desempenho em matemática e respostas correctas no pré-teste e no pós-teste, no grupo experimental observaram-se diferenças estatisticamente significativas na variável desempenho em matemática ($p<0.01$), na variável respostas correctas ($p<0.01$) e ao nível da interacção entre as variáveis ($p<0.01$). De modo semelhante, no grupo de controlo observaram-se diferenças estatisticamente significativas na variável desempenho em matemática ($p<0.01$), na variável respostas correctas ($p<0.01$) e ao nível da interacção entre as variáveis ($p<0.01$). Destaca-se, ainda, que no grupo experimental se verificou um progresso semelhante nos níveis de desempenho médio e elevado, e superior ao do nível de desempenho baixo, enquanto no grupo de controlo se verificou que o progresso aumentou sistematicamente com o desempenho.

C. Sexo

No pré-teste, em relação ao grupo experimental, a aplicação do teste de Mann-Whitney determinou diferenças estatisticamente significativas entre os sexos em relação ao número de respostas correctas no questionário ($p<0.05$), favoráveis ao sexo masculino. Já em relação ao grupo de controlo, não se verificaram diferenças estatisticamente significativas entre os sexos ($Z=0.086$).

No pós-teste, observando a Tabela 74, verificou-se que o teste de Mann-Whitney não determinou diferenças estatisticamente significativas entre os sexos em relação ao número de respostas correctas no questionário ($Z=0.353$) no grupo experimental. A única diferença com significância estatística verificou-se no subtema 'Probabilidade em experiências compostas: contexto de dados' ($p<0.05$), agora, favorável ao sexo feminino.

Tabela 74. Média das ordens segundo o sexo e valor de Z em cada subtema e no questionário, em relação às respostas correctas do grupo experimental no pós-teste.

SUBTEMAS	QUESTÕES	PÓS-TESTE – EXPERIMENTAL		
		Média segundo o sexo		Valor de Z[1]
		Masculino (n=39)	Feminino (n=57)	
Acontecimentos quase certos e quase impossíveis: contexto de moedas.	1	48.6	48.4	0.030
Probabilidade em experiências simples: contexto de urnas.	2	46.7	49.8	0.613
Probabilidade em experiências simples: contexto de roletas.	3	52.4	45.8	1.217
Probabilidade em experiências compostas: contexto de urnas.	4	52.7	45.6	1.280
Probabilidade em experiências compostas: contexto de dados.	5	43.3	52.0	1.964*
Questionário	1 a 5	49.7	47.7	0.353

Nota – [1] Valor de Z corrigido para repetições. *Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.05$.

Efectuada uma análise de variância de dois factores com medidas repetidas, tomando as variáveis sexo e respostas correctas no pré-teste e no pós-teste, apenas no grupo experimental, observaram-se diferenças estatisticamente significativas na variável respostas correctas ($p<0.01$) e não se verificaram diferenças estatisticamente significativas na variável sexo ($F=0.967$) nem ao nível da interacção entre as variáveis ($F=3.727$).

Também no pós-teste, conforme se observa na Tabela 75, o teste de Mann-Whitney não determinou diferenças estatisticamente significativas entre os sexos em relação ao número de respostas correctas no questionário no grupo de controlo ($Z=1.217$). As únicas diferenças com significância estatística observaram-se nos subtemas 'Probabilidade em experiências simples: contexto de urnas' ($p<0.05$) e 'Probabilidade em experiências compostas: contexto de dados' ($p<0.05$), sempre favoráveis ao sexo feminino.

Tabela 75. Média das ordens segundo o sexo e valor de Z em cada subtema e no questionário, em relação às respostas correctas do grupo de controlo no pós-teste.

SUBTEMAS	QUESTÕES	PÓS-TESTE – CONTROLO		
		Média segundo o sexo		Valor de Z[1]
		Masculino (n=48)	Feminino (n=54)	
Acontecimentos quase certos e quase impossíveis: contexto de moedas.	1	51.3	51.7	0.084
Probabilidade em experiências simples: contexto de urnas.	2	44.4	57.8	2.422*
Probabilidade em experiências simples: contexto de roletas.	3	53.1	50.1	0.532
Probabilidade em experiências compostas: contexto de urnas.	4	52.2	50.9	0.238
Probabilidade em experiências compostas: contexto de dados.	5	45.4	57.0	2.124*
Questionário	1 a 5	47.7	54.8	1.217

Nota – [1] Valor de Z corrigido para repetições. *Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.05$.

Efectuada uma análise de variância de dois factores com medidas repetidas, tomando as variáveis sexo e respostas correctas no pré-teste e no pós-teste, apenas no grupo de controlo, observaram-se diferenças estatisticamente significativas na variável respostas correctas ($p<0.01$) e não se verificaram diferenças estatisticamente significativas na variável sexo ($F=0.192$) nem ao nível da interacção entre as variáveis ($F=1.481$).

Muito embora não se tenha observado uma interacção estatisticamente significativa entre as duas variáveis em qualquer dos grupos, verificou-se que a interacção foi mais acentuada no grupo experimental. Neste caso, a melhor realização dos alunos do sexo masculino, observada no pré-teste, não se salientou no pós-teste.

4.3.3. Cálculo de probabilidades

Nesta secção estudam-se as classificações obtidas pelos alunos numa ficha de avaliação sobre o tema 'Estatística e probabilidades' do 9º ano de escolaridade. A ficha de avaliação, com a finalidade de classificar os alunos na disciplina de Matemática, centrava-se, diferentemente do questionário-experiência de ensino, em cálculo de probabilidades.

Para dificultar a possível comunicação entre os alunos e para usar procedimentos habituais dos professores, utilizaram-se quatro fichas de avaliação diferentes. Destas fichas, foram seleccionadas duas para cada turma de modo a obter-se um número equilibrado de alunos submetidos a cada ficha em ambos os grupos.

Na Tabela 76 apresentam-se as médias das cotações e o valor t de Student em relação a cada alínea, ao conjunto das alíneas de cada questão e à ficha de avaliação, segundo o grupo experimental e de controlo.

Observando a Tabela 76, verifica-se que se obtiveram diferenças estatisticamente significativas favoráveis ao grupo experimental nas alíneas 3.a), 4.b), 5.a), 5.b1), 5.b2) e 5.b3) e favoráveis ao grupo de controlo na alínea 4.a1).

Considerando a soma das cotações obtidas nas alíneas de cada questão, observou-se que as médias obtidas pelo grupo experimental foram sistematicamente superiores, relativamente ao grupo de controlo. Em termos de significância estatística, apenas se verificaram diferenças, favoráveis ao grupo experimental, na questão 5 ($p<0.01$).

Tabela 76. Médias das cotações e valor de t em cada alínea, em cada questão e na ficha de avaliação segundo o grupo experimental (*Exp*) e de controlo (*Contr*).

QUESTÕES	ALÍNEAS	*Exp* (n)	*Contr* (n)	Valor de t
Definir acontecimentos certos,	1.a)	4.4 (97)	4.5 (104)	0.088
possíveis (mas não certos) e	1.b)	4.7 (96)	4.6 (104)	0.742
impossíveis.	1.c)	3.9 (96)	3.5 (104)	1.608
	Total	13.0 (97)	12.3 (106)	1.284
Cálculo de probabilidades em	2.a)	4.7 (97)	4.4 (106)	1.486
experiências simples.	2.b)	3.7 (97)	3.9 (104)	0.770
	2.c)	3.5 (93)	3.4 (101)	0.302
	2.d)	4.0 (96)	4.2 (103)	0.599
	2.e)	4.0 (94)	3.8 (99)	0.398
	Total	19.6 (97)	19.2 (106)	0.401
Cálculo de probabilidades em	3.a)	4.2 (86)	3.5 (94)	2.707**
experiências simples	3.b)	4.1 (87)	4.0 (94)	0.606
envolvendo aspectos lógicos.	3.c)	3.8 (89)	3.7 (93)	0.487
	Total	11.9 (89)	10.8 (96)	1.463
Cálculo e aplicação de	4.a1)	4.1 (94)	4.6 (104)	2.242*
probabilidades em situações	4.a2)	3.9 (92)	3.6 (101)	1.272
concretas.	4.a3)	2.7 (90)	2.6 (93)	0.203
	4.b)	4.4 (80)	3.3 (73)	2.862**
	Total	14.1 (95)	12.7 (104)	1.627
Cálculo de probabilidades em	5.a)	3.2 (94)	1.8 (101)	3.682**
experiências compostas.	5.b1)	3.2 (92)	1.7 (97)	4.149**
	5.b2)	3.7 (94)	2.4 (96)	3.088**
	5.b3)	3.3 (91)	2.0 (89)	3.469**
	Total	12.9 (95)	7.3 (104)	5.415**
Ficha de avaliação	Total	69.2 (98)	61.0 (106)	2.675**

Nota – *Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.05$. **Diferenças estatisticamente significativas para $p<0.01$.

Finalmente, na totalidade da ficha de avaliação obtiveram-se diferenças estatisticamente significativas entre os grupos ($p<0.01$). Salienta-se, ainda, que as diferenças entre os resultados dos dois grupos na ficha de avaliação, favoráveis ao grupo experimental, devem-se, fundamentalmente, aos melhores resultados obtidos pelo grupo experimental na questão 5, que se insere no subtema ‘Probabilidades em experiências compostas’.

Considerando o desempenho em matemática, a aplicação da análise de variância à comparação das médias determinou diferenças significativas no grupo experimental ($p<0.01$) e no grupo de controlo ($p<0.01$). Em ambos os casos obtiveram-se diferenças com significância estatística ($p<0.05$) na comparação entre quaisquer dos dois níveis de desempenho: baixo *versus* médio, médio *versus* elevado e baixo *versus* elevado.

No caso da variável sexo, a aplicação do teste t de Student não determinou diferenças significativas no grupo experimental ($t=1.550$) e determinou diferenças significativas no grupo de controlo ($p<0.01$), neste caso favoráveis aos alunos do sexo feminino. Assim, a experiência de ensino realizada no grupo experimental teve um impacto semelhante nos alunos de ambos os sexos, enquanto a experiência de ensino tradicional teve um impacto maior sobre os alunos do sexo feminino.

C A P Í T U L O V

CONCLUSÕES, IMPLICAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

5.1. Introdução

Este capítulo organiza-se em três secções. Na primeira secção apresentam-se as conclusões do 'Estudo sobre intuições probabilísticas', tendo por referência cada uma das questões de investigação formuladas, e estabelecem-se implicações deste estudo.

Na segunda secção, apresentam-se as conclusões do 'Estudo sobre o ensino de probabilidades', tendo por referência a respectiva questão de investigação.

Finalmente, na terceira secção, fazem-se recomendações em termos de ensino de probabilidades e de futuras investigações, considerando os dois estudos realizados.

5.2. Estudo sobre intuições probabilísticas

Este estudo dirigiu-se à identificação e caracterização de intuições probabilísticas em alunos do 8º ano e do 11º ano. Os resultados obtidos, particularmente no que concerne ao 8º ano, constituíram contributos importantes para definir uma estratégia de ensino de probabilidades que contemplasse as intuições dos alunos ao nível do 9º ano de escolaridade.

5.2.1. Conclusões do estudo

<u>Questão de investigação</u> 1. Que intuições probabilísticas possuem alunos do 8º ano de escolaridade comparativamente com alunos do 11º ano de escolaridade?

Nesta questão de investigação estudaram-se intuições probabilísticas de alunos do 8º ano e do 11º ano em três subtemas: (1) 'Classificação de um acontecimento em certo, possível e impossível', (2) 'Probabilidade em experiências simples' e (3) 'Probabilidade em experiências compostas'.

1. No subtema 'Classificação de um acontecimento em certo, possível e impossível' estudaram-se somente as respostas dos alunos, tendo-se verificado que, na maior parte das questões do subtema, os alunos de ambos os anos escolares foram capazes de classificar correctamente o acontecimento. As dificuldades dos alunos surgiram nos acontecimentos certos e nos acontecimentos que envolviam a utilização dos conectivos *não* e *ou*. Estas dificuldades aumentaram consideravelmente nos acontecimentos certos que envolviam conectivos lógicos, especialmente nos acontecimentos de experiências compostas.

O facto de muitos alunos terem classificado um acontecimento certo como possível, sugere que a dificuldade na sua identificação residiu em distinguir estes dois tipos de acontecimentos. A este propósito observe-se que a classificação de um acontecimento em certo implica o reconhecimento de que ele é 'possível em todos os casos', enquanto o aluno pode ter classificado o acontecimento em possível com base em apenas alguns casos. Já no caso da distinção entre acontecimentos possíveis e impossíveis, um tal raciocínio conduz sempre à classificação do acontecimento em impossível, pois ele é 'impossível em todos os casos'.

As maiores discrepâncias entre os alunos do 8º ano e do 11º ano observaram-se nos acontecimentos certos e/ou que envolviam conectivos lógicos na sua formulação, precisamente aqueles que se revelaram mais difíceis, nos quais os alunos do 11º ano seleccionaram mais frequentemente a resposta correcta.

No caso dos alunos do 11º ano, não se salientaram diferenças nas percentagens de selecção das respostas correctas entre os alunos com ensino de probabilidades (*cep*) e sem ensino de probabilidades (*sep*) nas várias questões.

Exceptuando o caso dos acontecimentos certos e/ou que envolvem conectivos lógicos, as elevadas percentagens de respostas correctas obtidas pelos alunos de ambos os anos na maior parte das questões sugerem que eles possuem intuições correctas acerca da classificação de um acontecimento em certo, possível e impossível.

Também Fischbein, Nello e Marino (1991) observaram que a maioria dos alunos, incluindo alunos da mesma idade dos que participaram neste estudo, identificaram adequadamente o tipo de acontecimento e verificaram que a categoria dos acontecimentos certos se revelou mais difícil.

Numa perspectiva ligeiramente diferente, Leake (1962) verificou que o conceito de espaço amostral, envolvendo a definição de acontecimentos, se revelou o mais acessível aos alunos, de entre os conceitos de espaço amostral, de probabilidade de acontecimentos simples e de probabilidade de acontecimentos compostos.

2. No subtema 'Probabilidade em experiências simples', verificou-se que os alunos do 8º ano, no contexto das urnas, basearam as suas respostas, fundamentalmente, em comparações resultantes de contagens – comparações entre o número total de bolas, entre o número de bolas de uma das cores e entre o número de bolas de ambas as cores. No contexto do dado, as respostas resultaram de uma compreensão errada da lei da extensão, da comparação do número de casos favoráveis e do facto de ambos os acontecimentos serem possíveis. A afirmação de que ambos os acontecimentos são possíveis, constituindo uma ideia muito primitiva na quantificação de probabilidades, foi pouco referida no contexto das urnas e muito mencionada no contexto do dado.

Tal como no presente estudo, as maiores dificuldades reveladas pelos alunos nas questões que implicavam o conceito de proporção, comparativamente com as que apenas implicavam o conceito de contagem, foram também observadas por Green (1983) e por Fischbein, Pamput e Mînzat (1975b).

Comparativamente com os alunos do 8º ano, os alunos do 11º ano apresentaram, em geral, raciocínios semelhantes, embora com percentagens diferentes, exceptuando o raciocínio que consistiu na comparação das probabilidades dos acontecimentos. Este raciocínio foi mencionado por uma percentagem considerável de alunos do 11º ano e foi muito pouco referido no 8º ano. Também o raciocínio de que os acontecimentos são possíveis quase não foi referido no contexto das urnas e foi referido por uma percentagem muito inferior de alunos no contexto do dado, comparativamente com o 8º ano.

A consideração conjunta dos raciocínios resultantes da proporção do número de bolas, da comparação do número de casos favoráveis e da comparação das probabilidades dos acontecimentos, enquanto 'raciocínios gerais' que garantem a selecção da resposta correcta, revelou que eles foram mencionados quase exclusivamente pelos alunos do 11º ano no contexto das urnas e muito mais frequentemente referidos no contexto do dado, em relação aos alunos do 8º ano. Entre os alunos do 11º ano, observou-se que os alunos *cep* aderiram mais frequentemente aos 'raciocínios gerais' em todas as questões deste subtema.

3. No subtema 'Probabilidade em experiências compostas', os alunos de ambos os anos escolares revelaram possuir intuições probabilísticas mais limitadas e primitivas. Os alunos do 11º ano referiram-se a raciocínios envolvendo a probabilidade das experiências simples implicadas na experiência composta. Estes raciocínios, que geralmente levaram os alunos a seleccionarem uma resposta errada, foram pouco mencionados pelos alunos do 8º ano. Já a afirmação da equiprobabilidade dos acontecimentos, baseado no facto de ambos os acontecimentos serem possíveis, foi referida pelos alunos de ambos os anos, embora muito mais frequentemente pelos do 8º ano. No caso da questão inserida no contexto das urnas, a comparação entre o número de bolas de cada cor foi o raciocínio mais referido para justificar a equiprobabilidade dos acontecimentos em ambos os anos escolares.

A consideração conjunta dos raciocínios resultantes da comparação do número de casos favoráveis e da comparação das probabilidades dos acontecimentos, enquanto 'raciocínios gerais' que garantem a selecção da resposta correcta, mostrou que foram muito menos referidos do que no subtema 'Probabilidade em experiências simples'. No caso do 8º ano, os alunos nunca se referiram à comparação das probabilidades dos acontecimentos e muito poucos alunos se referiram à comparação do número de casos favoráveis. Além destes raciocínios, a resposta correcta foi também explicada a partir da maior dificuldade em obter o mesmo resultado nos vários objectos aleatórios ou da maior probabilidade de obter resultados diferentes nesses objectos aleatórios. Entre os alunos do 11º ano *cep* e *sep*, observaram-se, nas várias questões, percentagens semelhantes na adesão aos 'raciocínios gerais'.

Tal como no presente estudo, as maiores dificuldades exibidas pelos alunos no subtema 'Probabilidade em experiências compostas', em relação ao subtema 'Probabilidade em experiências simples', foram também observadas nos estudos de Fischbein, Barbat e Mînzat (1975), Fischbein, Nello e Marino (1991), Green (1983) e Munisamy e Doraisamy (1998). Também numa perspectiva ligeiramente diferente, Leake (1962) verificou que o conceito de probabilidade de acontecimentos compostos se revelou o mais difícil dos três conceitos estudados.

De entre as cinco questões incluídas neste subtema, salientam-se as maiores percentagens de respostas correctas obtidas em duas delas, justificadas frequentemente a partir de 'raciocínios gerais'. Nestas duas questões, uma inserida no contexto de dados e outra inserida no contexto de moedas, verificou-se que a sua maior generalidade favoreceu a selecção da resposta correcta. A maior facilidade observada nas questões gerais pode ser explicada pelo facto de nelas serem maiores as discrepâncias entre o número de casos favoráveis. A este propósito, observe-se ainda que, no caso da questão inserida no contexto do dado, a maior discrepância entre o número de casos favoráveis conduziu também a seleccionar mais frequentemente a resposta correcta. Este resultado foi também observado por Fischbein, Nello e Marino (1991).

Dos resultados apresentados, retira-se a seguinte conclusão:

<u>Conclusão</u> 1. A elevada percentagem de respostas correctas obtidas na maior parte das questões sobre a classificação de acontecimentos em certos, possíveis e impossíveis sugere que os alunos possuem intuições correctas acerca deste subtema. As dificuldades

dos alunos surgiram nos acontecimentos certos e aumentaram com a inclusão de conectivos lógicos na sua formulação, especialmente nas experiências compostas.

Em probabilidades, os alunos revelaram intuições probabilísticas baseadas em comparações resultantes de contagens, em 'raciocínios gerais', no facto de os acontecimentos serem possíveis e avaliaram probabilidades em experiências compostas a partir de probabilidades em experiências simples.

Em ambos os anos escolares os alunos revelaram intuições mais limitadas e primitivas nas experiências compostas do que nas experiências simples. Entre os alunos dos dois anos escolares, destaca-se que os alunos do 8º ano justificaram mais frequentemente as suas respostas a partir de comparações baseadas em contagens e no facto de os acontecimentos serem possíveis, e pouco frequentemente referiram 'raciocínios gerais'. Diferentemente, uma percentagem considerável de alunos do 11º ano referiu 'raciocínios gerais', mais frequentemente no caso das probabilidades em experiências simples, e, no caso das experiências compostas, recorreram a probabilidades de experiências simples envolvidas na experiência composta.

Entre os alunos do 11º ano, o ensino de probabilidades favoreceu a adesão a 'raciocínios gerais' nas probabilidades em experiências simples. Já no caso das probabilidades em experiências compostas, tal impacto não se fez sentir.

<u>Questão de investigação</u> 2. Há diferenças nas respostas correctas em relação às variáveis ano escolar, desempenho em matemática, sexo, ensino de probabilidades e interpretação do conceito de probabilidade, entre alunos do 8º ano e/ou do 11º ano de escolaridade?

Sintetizam-se, seguidamente, os resultados obtidos por referência a cada uma das variáveis estudadas: (1) ano escolar, (2) desempenho em matemática, (3) sexo, (4) ensino de probabilidades e (5) interpretação do conceito de probabilidade.

1. Considerando individualmente cada uma das 26 perguntas do questionário-conceito clássico, verificou-se que uma maior percentagem de alunos do 11º ano seleccionou a

resposta correcta, comparativamente com os alunos do 8º ano, em 24 dessas perguntas.

Conforme foi referido antes, no subtema ‘Acontecimento certo, possível e impossível’, uma elevada percentagem de alunos de ambos os anos escolares seleccionaram a resposta correcta na maior parte das questões deste subtema. As dificuldades reveladas pelos alunos verificaram-se nos acontecimentos certos e/ou que incluíam conectivos lógicos, mais agravadas nos acontecimentos de experiências compostas. Foi precisamente nestes acontecimentos, que se revelaram mais difíceis, que os alunos do 11º ano seleccionaram mais frequentemente a resposta correcta, comparativamente com os alunos do 8º ano.

No subtema ‘Probabilidade em experiências simples’, verificou-se que os alunos do 11º ano seleccionaram mais frequentemente a resposta correcta do que os alunos do 8º ano em todas as questões. As diferenças entre os dois grupos de alunos foram mais acentuadas quando o número total de bolas dos dois sacos era diferente, no contexto das urnas, e quando um dos acontecimentos estava contido no outro, no contexto do dado.

No contexto das urnas, a dificuldade em seleccionar a resposta correcta aumentou, sucessivamente, ao passar-se de dois sacos com o mesmo número total de bolas para dois sacos com igual número de bolas de duas cores ou para dois sacos com igual número de bolas de uma das cores e, destes, para dois sacos com números diferentes de bolas de duas cores. No contexto do dado, os alunos revelaram maior dificuldade em identificar o acontecimento mais extenso como sendo mais o provável, no caso em que um dos acontecimentos estava estritamente contido no outro. Neste último caso, algumas das dificuldades podem estar relacionadas com a possibilidade de os alunos terem visto o número 5 como representativo dos números ímpares (Tversky & Kahneman, 1982a).

No subtema ‘Probabilidade em experiências compostas’, os alunos de ambos os anos escolares seleccionaram a resposta correcta muito menos frequentemente, em relação aos outros dois subtemas anteriores. Entre o 8º ano e o 11º ano, destaca-se a selecção mais frequente da resposta correcta entre os alunos do 11º ano em três questões deste subtema: na questão inserida no contexto das urnas e nas duas questões mais gerais, que já antes referimos.

Apesar das discrepâncias referidas, quer entre as questões, quer entre os anos escolares, as percentagens de respostas correctas nas várias questões de cada subtema mostra um padrão semelhante nos dois grupos de alunos, donde se infere uma ordenação análoga da dificuldade das questões em ambos os anos.

Em termos de significância estatística, a aplicação do teste χ^2 determinou diferenças estatisticamente significativas em 17 perguntas e o teste de Mann-Whitney determinou diferenças estatisticamente significativas em todos os subtemas e no questionário, sempre favoráveis aos alunos do 11º ano.

Em síntese, podemos concluir que os alunos do 11º ano seleccionaram mais frequentemente a resposta correcta na maior parte das perguntas, em todos os subtemas e no questionário.

Embora no estudo de Fischbein, Barbat e Mînzat (1975) não se tenha verificado uma melhoria sistemática e espontânea na selecção das respostas correctas com a idade (ano escolar), muitos estudos referem que as respostas correctas aumentam com a idade, tal como se verificou no presente estudo. Falk, Falk e Levin (1980) verificaram que as dificuldades dos alunos diminuíram com a idade e assistiu-se a uma melhoria clara e repentina por volta dos 6 anos de idade; Fischbein, Pampu e Mînzat (1975a) observaram que a percentagem de respostas correctas aumentou com a idade nas situações probabilísticas mais complexas, envolvendo resultados com probabilidades diferentes e as operações de adição e multiplicação de probabilidades; Fischbein, Pampu e Mînzat (1975b) observaram um aumento claro das respostas correctas com a idade, especialmente nas questões que envolviam razões bidimensionais; Fischbein, Nello e Marino (1991) observaram uma ligeira melhoria com a idade na classificação de acontecimentos em certos, possíveis e impossíveis, uma melhoria mais clara em relação à equivalência de estruturas estocásticas e, no caso da probabilidade em experiências compostas, o aumento da percentagem de respostas correctas aconteceu nas questões gerais, referidas antes; Green (1983) e Munisamy e Doraisamy (1998) verificaram progressos claros na selecção das respostas correctas com a idade e, finalmente, Leake (1962) verificou um aumento linear do *score* médio com a idade.

2. Em ambos os anos escolares a selecção das respostas correctas nos vários subtemas e no questionário foi influenciada pelo desempenho em matemática dos alunos. Depois de codificado o desempenho em matemática em baixo, médio e elevado, a aplicação do teste de Kruskal-Wallis determinou diferenças estatisticamente significativas em duas questões do tema 'Acontecimento certo, possível e impossível', no subtema 'Probabilidade em experiências simples' e no questionário, no caso dos alunos do 8º ano, e em duas questões do subtema 'Acontecimento certo, possível e impossível', no subtema 'Probabilidade em experiências simples', no subtema 'Probabilidade em experiências compostas' e no questionário, no caso do 11º ano. Assim, conclui-se que, em geral, a um melhor desempenho em matemática correspondeu um maior número de respostas correctas.

O aumento sistemático das respostas correctas com o desempenho, verificado no presente estudo, foi também observado nos estudos de Green (1983) e de Munisamy e Doraisamy (1998). Particularmente, no estudo de Green, o desempenho em matemática foi mesmo a variável que mais explicou a melhor realização dos alunos, de entre as variáveis idade, sexo e desempenho em matemática. Também no estudo de Leake (1962), em que participaram apenas alunos com desempenho médio e elevado em matemática, verificou-se que os alunos com maior desempenho também obtiveram maiores *scores* no teste e nos três conceitos estudados. No entanto, num sentido diferente, no âmbito de concepções probabilísticas erradas, Fernandes (1990) não observou diferenças significativas entre o erro e o desempenho em matemática.

3. No caso da variável sexo, a sua influência não foi tão determinante como a variável desempenho em matemática. Recorrendo ao teste de Mann-Whitney, no caso do 8º ano, observaram-se diferenças estatisticamente significativas no subtema 'Probabilidade em experiências simples' e, no caso do 11º ano, observaram-se diferenças estatisticamente

significativas no subtema ‘Probabilidade em experiências simples’ e no questionário, em ambos os anos favoráveis aos alunos do sexo masculino. Em resumo, entre os alunos do 8º ano verificou-se uma tendência para os alunos do sexo masculino escolherem mais frequentemente a resposta correcta, tendência essa que aparece mais vincada entre os alunos do 11º ano.

A tendência favorável aos alunos do sexo masculino, observada no presente estudo, verificou-se também nos estudos de Green (1983) e de Munisamy e Doraisamy (1998). Diferentemente, nos estudos de Leake (1962) e de Fischbein, Pampu e Mînzat (1975b) não se observaram diferenças entre ambos os sexos. Neste último caso, os resultados não são de todo contraditórios com a tendência referida, pois as discrepâncias entre os sexos tendem a acentuar-se com a idade, como foi claro no presente estudo e no estudo de Munisamy e Doraisamy, e os sujeitos que participaram nos estudos de Leake e de Fischbein, Pampu e Mînzat eram mais novos.

4. Em relação à variável ensino de probabilidades, estudada apenas entre os alunos do 11º ano, o teste de Mann-Whitney não determinou diferenças estatisticamente significativas entre os alunos *cep* e *sep* em qualquer dos subtemas nem no questionário. Também Fischbein, Nello e Marino (1991) referem efeitos positivos limitados e um tanto inconsistentes do ensino de probabilidades na selecção das respostas correctas. Estes autores observaram uma ligeira melhoria na classificação de acontecimentos em certos, possíveis e impossíveis e na equivalência de estruturas estocásticas. No caso da probabilidade em experiências compostas, nas questões concretas foram os alunos mais novos e sem ensino de probabilidades que mais frequentemente seleccionaram as respostas correctas. Nas questões mais gerais, entre os alunos mais velhos, o ensino de probabilidades não produziu uma melhoria sistemática nas respostas. No entanto, num estudo centrado em concepções probabilísticas erradas, Fernandes (1990) observou que, tendencialmente, os alunos *cep* apresentaram um erro médio inferior aos alunos *sep*, embora as diferenças não tenham sido estatisticamente significativas.

5. Finalmente, no 8º ano, entre a interpretação clássica e a interpretação frequencista de probabilidade, destaca-se que a interpretação frequencista favoreceu a selecção das respostas correctas, quer numa questão do subtema 'Acontecimento certo, possível e impossível', quer no subtema 'Probabilidade em experiências compostas' e no questionário. Em todos estes casos observaram-se diferenças estatisticamente significativas através da aplicação do teste de Mann-Whitney. No caso do subtema 'Probabilidade em experiências compostas', salienta-se ainda, através da aplicação do teste χ^2, a obtenção de diferenças estatisticamente significativas em todas as questões deste subtema.

Tal como no presente estudo, Fischbein, Pampu e Mînzat (1975a) observaram que a interpretação frequencista favoreceu especialmente os alunos mais velhos, de idades compreendidas entre 11:3 e 14:5, na selecção das respostas correctas, comparativamente com a interpretação clássica. Observe-se que no estudo da variável interpretação do conceito de probabilidade, a média das idades dos alunos, todos do 8º ano, era de 13:9, inserindo-se, portanto, na faixa etária dos alunos do estudo citado.

Dos resultados apresentados, retira-se a seguinte conclusão:

Conclusão 2. Entre os dois anos escolares, os alunos do 11º ano seleccionaram a resposta correcta mais frequentemente na maior parte das perguntas, o que se repercutiu na obtenção de diferenças estatisticamente significativas nos subtemas considerados e no questionário.

A melhor realização dos alunos do 11º ano, em relação à selecção da resposta correcta, explica-se melhor pela idade (ano escolar) do que pelo ensino específico de probabilidades, por que tinham passado alguns destes alunos no 9º ano de escolaridade.

Em ambos os anos escolares, o melhor desempenho em matemática favoreceu, em geral, a selecção das respostas correctas. Já no caso da variável sexo, observou-se no 8º ano uma tendência favorável aos alunos do sexo masculino, que se acentuou entre os alunos do 11º ano.

Finalmente, entre os alunos do 8º ano, a interpretação frequencista favoreceu a selecção da resposta correcta em acontecimentos de experiências compostas, que foram exactamente aqueles que se revelaram mais difíceis.

Questão de investigação 3. Há diferenças na confiança nas respostas, em relação às variáveis ano escolar, desempenho em matemática, sexo e ensino de probabilidades, entre alunos do 8º ano e/ou do 11º ano de escolaridade?

Nesta questão de investigação estudou-se a confiança com que os alunos responderam às questões dos subtemas ‘Probabilidade em experiências simples’ e ‘Probabilidade em experiências compostas’, considerando as variáveis: (1) ano escolar, (2) desempenho em matemática, (3) sexo e (4) ensino de probabilidades.

1. Comparativamente com os alunos do 11º ano, os alunos do 8º ano depositaram uma confiança média superior nas respostas (correctas e erradas), nas respostas correctas e nas respostas erradas no conjunto das questões dos subtemas ‘Probabilidade em experiências simples’ e ‘Probabilidade em experiências compostas’. Em termos de significância estatística, a aplicação do teste t de Student apenas determinou diferenças estatisticamente significativas entre os dois anos escolares no caso da confiança nas respostas erradas.

Comparando a confiança nas respostas correctas com a confiança nas respostas erradas, verificou-se que os alunos em cada um dos anos escolares depositaram maior confiança nas respostas correctas, tendo as diferenças sido estatisticamente significativas.

Refira-se que, num contexto de concepções erradas em probabilidades, em que participaram alunos do 11º ano *sep* e alunos universitários *cep* (futuros professores de matemática), Fernandes (1990) não observou diferenças significativas entre as confianças nas respostas correctas e nas respostas não correctas. No âmbito das concepções erradas em física, Gil e Carrascosa (1990) verificaram que os alunos, de diferentes níveis escolares, afirmaram as respostas erradas com um alto grau de confiança, que aumentou com a idade dos alunos. Brown e Clement (1987) extraíram desta elevada confiança evidência para sugerir que tais respostas traduzem pré-concepções e não tanto simples palpites.

2. Considerando, agora, em cada ano escolar, os níveis de desempenho em matemática, observou-se que a confiança média nas respostas (correctas e erradas), nas respostas correctas e nas respostas erradas aumentou com o desempenho. Todavia, efectuando uma análise de variância, verificaram-se diferenças estatisticamente significativas apenas entre as médias das confianças nas respostas e nas respostas correctas em ambos os anos escolares.

3. Já quanto à variável sexo, observou-se entre os alunos do sexo masculino de cada um dos anos escolares uma confiança média superior em relação às respostas (correctas e erradas), às respostas correctas e às respostas erradas. Contudo, no caso do 8º ano, a aplicação do teste t de Student não determinou quaisquer diferenças estatisticamente significativas entre as médias das confianças nas respostas, nas respostas correctas e nas respostas erradas. No caso do 11º ano, todas estas diferenças foram estatisticamente significativas.

Fernandes (1990) verificou também que os alunos do sexo masculino depositaram uma maior confiança nas suas respostas, em relação aos alunos do sexo feminino. Constatou, ainda, que a maior confiança dos alunos do sexo masculino não se explicou por uma menor adesão às respostas erradas nem por um maior desempenho em matemática ou em probabilidades. Por seu lado, McLeod (1992) refere estudos em que os rapazes demonstraram uma confiança superior à das raparigas em tarefas de estimação e em que a confiança aumentou do nível de escolaridade elementar para o nível de escolaridade secundária.

4. Finalmente, a variável ensino de probabilidades, estudada apenas entre os alunos do 11º ano, determinou diferenças na confiança com que os alunos *cep* e *sep* afirmaram as suas respostas (correctas e erradas). Neste caso, os alunos *cep* depositaram uma maior

confiança nas respostas, nas respostas correctas e nas respostas erradas, tendo o teste t de Student determinado diferenças estatisticamente significativas em todos os casos.

Contrariamente, no estudo já antes referido, Fernandes (1990) observou que o ensino de probabilidades não aumentou a confiança com que os alunos afirmaram as suas respostas. Foram mesmo os alunos *sep* que depositaram uma maior confiança nas respostas.

Comparativamente com o estudo citado sobre concepções probabilísticas erradas, os resultados obtidos no presente estudo apontam para uma situação mais favorável, na medida em que se verificou, em ambos os anos escolares, uma maior confiança nas respostas correctas, a qual aumentou com o desempenho em matemática.

Dos resultados apresentados, retira-se a seguinte conclusão:

Conclusão 3. Os alunos do 8º ano, comparativamente com os alunos do 11º ano, depositaram uma confiança superior nas respostas erradas. Além disso, em cada um dos anos escolares os alunos depositaram uma confiança superior nas respostas correctas, em relação às respostas erradas.

Em ambos os anos escolares, ao maior desempenho em matemática correspondeu uma maior confiança nas respostas (correctas e erradas) e nas respostas correctas.

Em relação à variável sexo, no 8º ano observou-se uma tendência para os alunos do sexo masculino depositarem uma maior confiança nas respostas (correctas e erradas), nas respostas correctas e nas respostas erradas. Esta tendência acentuou-se entre os alunos do 11º ano, passando a ser sempre estatisticamente significativa.

Por último, no 11º ano, o ensino de probabilidades repercutiu-se de modo semelhante sobre as respostas correctas e erradas, aumentando a confiança nessas respostas.

Das conclusões deste estudo, particularmente no que concerne às duas primeiras questões de investigação, salienta-se uma aquisição mais limitada e tardia dos aspectos do conceito de probabilidade estudados, relativamente ao que foi observado por Piaget e Inhelder (s/d). As dificuldades reveladas pelos alunos que participaram no presente estudo no que respeita aos acontecimentos certos, à probabilidade em experiências simples – implicando ou não o conceito de proporção – e à probabilidade em experiências compostas não se enquadram completamente na perspectiva de Piaget e Inhelder. Diferentemente, muitos dos resultados obtidos no presente estudo são compatíveis com resultados obtidos por Fischbein e seus colaboradores.

Por outro lado, a necessidade de promover o desenvolvimento do conceito de probabilidade através do ensino, muitas vezes preconizada por Fischbein e seus colaboradores, pode constituir um meio de vencer as limitações do seu desenvolvimento espontâneo. Contudo, como se verificou no presente estudo, não se deve assumir que qualquer tipo de ensino produz um tal efeito.

5.2.2. Implicações do estudo

Considerando os resultados deste estudo como um contributo para estabelecer uma estratégia de ensino de probabilidades que contemple as intuições dos alunos, salientam-se, de seguida, algumas implicações do estudo para o ensino e a aprendizagem de probabilidades, algumas das quais foram tidas em conta na planificação da intervenção de ensino do segundo estudo.

<u>Implicação</u> 1. Conforme se observou no 11º ano, os alunos que tinham estudado probabilidades no 9º ano não seleccionaram mais frequentemente as respostas correctas do que os alunos que não tinham estudado probabilidades. Em termos de intuições, observou-se uma ligeira superioridade dos alunos com ensino de probabilidades no subtema ‘Probabilidade em experiências simples’, ao aderirem mais frequentemente a ‘raciocínios gerais’. Assim, o ensino de probabilidades, pelo qual os alunos tinham passado, ao não revelar um impacto positivo claro sobre as intuições justifica a concepção e implementação de uma estratégia de ensino capaz de melhorar as intuições dos alunos.

<u>Implicação</u> 2. No subtema ‘Acontecimento certo, possível e impossível’, apesar das elevadas percentagens de respostas correctas obtidas na maior parte das questões do

subtema, o que pode sugerir que os alunos possuem intuições adequadas, uma atenção especial deve ser dada no ensino aos acontecimentos certos e aos acontecimentos que incluam conectivos lógicos na sua formulação, particularmente nas experiências compostas.

Muito embora os conectivos lógicos não tenham sido incluídos nas questões sobre probabilidades, parece recomendável explorar e clarificar os seus significados também nos subtemas de probabilidades. Especialmente no subtema 'Probabilidades em experiências simples', o seu estudo, ao nível do 9º ano, não envolve um grau de complexidade excessiva.

Implicação 3. No subtema 'Probabilidade em experiências simples', as comparações baseadas em contagens, que foram muito referidas no contexto das urnas, devem ser substituídas por comparações multiplicativas, e a ideia de que os acontecimentos são possíveis, muito referida no contexto do dado, enquanto ideia primitiva e vaga em termos de quantificação da probabilidade, deve ser clarificada e desenvolvida em termos de probabilidades.

No sentido de ultrapassar os raciocínios baseados em contagens, enquanto raciocínios limitados na sua aplicação, sugere-se a utilização de estratégias baseadas no conceito de proporção para comparar probabilidades.

Implicação 4. No subtema 'Probabilidade em experiências compostas', os alunos revelaram intuições muito limitadas e primitivas em termos de ideias probabilísticas normativas. Muito embora, em termos de ensino, se devam considerar as grandes dificuldades manifestadas pelos alunos neste subtema, o estudo revelou dois resultados que podem ser explorados com vantagem no ensino. Um, consistiu nos melhores resultados obtidos, em termos de respostas correctas e de adesão a 'raciocínios gerais', nas duas questões de maior generalidade, e nas quais se acentuava a discrepância entre o número de casos favoráveis dos acontecimentos envolvidos. O outro, estudado apenas entre alunos do 8º ano, revelou que a interpretação frequencista, comparativamente com a interpretação clássica, favoreceu sistematicamente a selecção da resposta correcta em todas as questões do subtema.

Implicação 5. O facto de o número de respostas correctas ter aumentado com o melhor desempenho em matemática, e o facto dos alunos terem depositado uma maior confiança nas respostas correctas do que nas respostas erradas, constituem dois resultados favoráveis à possibilidade de promover intuições adequadas.

Implicação 6. A tendência observada entre os alunos do sexo masculino, mais acentuada no 11º ano, para seleccionarem mais frequentemente a resposta correcta e para serem mais confiantes nas respostas, destaca a necessidade do ensino proporcionar oportunidades aos alunos de ambos os sexos de modo a equilibrar as suas realizações e a sua confiança.

5.3. Conclusões do 'Estudo sobre o ensino de probabilidades'

Neste estudo definiu-se e avaliou-se uma estratégia de ensino de probabilidades contemplando as intuições probabilísticas em alunos do 9º ano de escolaridade.

Questão de investigação 4. No 9º ano de escolaridade, um tipo de ensino que considere as ideias intuitivas dos alunos tem um maior impacto na aprendizagem de probabilidades, comparativamente com um ensino tradicional, no que respeita às intuições, às respostas correctas e ao cálculo de probabilidades?

1. Intuições probabilísticas. O estudo das intuições probabilísticas contemplou cinco subtemas: 'Acontecimentos quase certos e quase impossíveis: contexto de moedas', 'Probabilidade em experiências simples: contexto de urnas', 'Probabilidade em experiências simples: contexto de roletas', 'Probabilidade em experiências compostas: contexto de urnas' e 'Probabilidade em experiências compostas: contexto de dados'.

No subtema 'Acontecimentos quase certos e quase impossíveis: contexto de moedas', os alunos justificaram as suas respostas, fundamentalmente, em raciocínios baseados em características da moeda – existência de duas faces ou equiprobabilidade das suas faces –, no elevado número de lançamentos, no número exacto de resultados, no reconhecimento de que não se trata de um acontecimento certo ou impossível e em razões causais.

De todos estes raciocínios, verificou-se que apenas o reconhecimento do acontecimento como não certo ou não impossível conduziu sistematicamente à escolha da resposta correcta. Estes raciocínios, que foram adoptados por percentagens semelhantes de alunos dos dois grupos no pré-teste, explicam, em parte, a selecção mais frequente da resposta correcta entre os alunos do grupo experimental no pós-teste. Já a referência a razões causais, mencionadas por alguns alunos no pré-teste, praticamente desapareceu no pós-teste em ambos os grupos.

No subtema 'Probabilidade em experiências simples: contexto de urnas', os alunos basearam as suas respostas, fundamentalmente, em comparações resultantes de contagens – comparações entre o número total de bolas, entre o número de bolas de uma das cores e entre o número de bolas de ambas as cores –, em 'raciocínios gerais' – proporção do número de bolas e comparar as probabilidades dos acontecimentos – e no facto de ambos os acontecimentos serem possíveis.

Do pré-teste para o pós-teste, observou-se uma diminuição na adesão a comparações baseadas em contagens e um aumento na referência a 'raciocínios gerais', sempre mais acentuados no grupo experimental. No pós-teste, os alunos do grupo experimental referiram mais frequentemente 'raciocínios gerais' do que os alunos do grupo de controlo, tendo-se observado as maiores diferenças nas questões cuja resposta correcta implicava comparações multiplicativas. Em ambos os grupos, o raciocínio baseado no facto dos acontecimentos serem possíveis foi referido por poucos alunos no pré-teste e deixou de ser mencionado no pós-teste.

No subtema 'Probabilidade em experiências simples: contexto de roletas', salienta-se a referência a 'raciocínios gerais' – comparar o número de casos favoráveis e comparar as probabilidades dos acontecimentos –, a alusão a razões causais e ao facto de os acontecimentos serem possíveis.

Nos ‘raciocínios gerais’ observou-se um grande aumento da percentagem de alunos que os referiram do pré-teste para o pós-teste. Neste caso, no pré-teste, o raciocínio baseado na comparação das probabilidades dos acontecimentos quase não foi referido e o raciocínio resultante da comparação do número de casos favoráveis foi mencionado por um número considerável de alunos de ambos os grupos.

A consideração conjunta dos ‘raciocínios gerais’ mostra que eles foram mais referidos pelos alunos do grupo experimental no pós-teste numa das três questões. Quanto às duas outras questões, a maior percentagem de respostas correctas do grupo experimental deveu-se, principalmente, à maior frequência com que estes alunos se referiram à disjunção, enquanto raciocínio que envolveu cada um dos acontecimentos, sem, contudo, a considerarem.

A alusão à causalidade diminuiu drasticamente do pré-teste para o pós-teste em ambos os grupos, não tendo sido nunca mencionado no grupo experimental no pós-teste. Também a observação de que ambos os acontecimentos são possíveis diminuiu do pré-teste para o pós-teste, especialmente no grupo experimental.

Neste subtema, especialmente no pré-teste, os alunos tiveram dificuldade em interpretar o significado dos conectivos lógicos *e*, *ou* e *não*. Para Tversky e Kahneman (1982a) as maiores dificuldades dos alunos nos acontecimentos conjuntivos e disjuntivos podem estar relacionadas com a adesão à heurística de ajustamento e ancoragem.

No subtema ‘Probabilidade em experiências compostas: contexto de urnas’, os alunos basearam as suas respostas em comparações resultantes de contagens – comparar o número de bolas de cada cor –, em ‘raciocínios gerais’ – comparar o número de casos favoráveis e comparar as probabilidades dos acontecimentos – e no facto de os acontecimentos serem possíveis.

A comparação entre o número de bolas de cada cor foi o raciocínio mais referido por ambos os grupos, tanto no pré-teste como no pós-teste. No entanto, do pré-teste para o pós-teste, diminuiu a percentagem de alunos que a ele aderiram, especialmente no grupo experimental.

Os ‘raciocínios gerais’, praticamente não referidos no pré-teste, foram mencionados por uma percentagem superior de alunos do grupo experimental no pós-teste. Destes raciocínios, destaca-se sistematicamente uma maior adesão à comparação das probabilidades. Muito embora todas as questões deste subtema se tenham revelado muito difíceis, a consideração conjunta dos ‘raciocínios gerais’ mostrou que o grupo experimental aderiu mais frequentemente a estes raciocínios no pós-teste.

Finalmente, a observação de que os acontecimentos são possíveis foi referida por alguns alunos no pré-teste e quase nunca foi mencionada no pós-teste por ambos os grupos.

No subtema ‘Probabilidade em experiências compostas: contexto de dados’, os alunos justificaram as suas respostas na comparação das somas, em ‘raciocínios gerais’ – comparar o número de casos favoráveis e comparar as probabilidades dos acontecimentos – e no facto de os acontecimentos serem possíveis.

Enquanto no pré-teste a comparação das somas foi o raciocínio mais referido pelos alunos de ambos os grupos, no pós-teste observou-se uma considerável diminuição da percentagem de alunos que o mencionaram, diminuição esta mais acentuada no grupo experimental. No pós-teste, os dois ‘raciocínios gerais’ foram os raciocínios mais referidos no grupo experimental, e qualquer deles não se destacou no grupo de controlo. Em consequência, a consideração conjunta dos ‘raciocínios gerais’ mostrou que, no pós-teste, eles foram muito mais referidos pelos alunos do grupo experimental do que pelos alunos do grupo de controlo.

Por último, o facto de ambos os acontecimentos serem possíveis, mais referido no grupo de controlo no pré-teste, deixou de ser referido no grupo experimental e verificou-se uma ligeira diminuição à sua adesão no grupo de controlo no pós-teste.

Especialmente em relação ao pré-teste, os resultados obtidos neste estudo confirmam e ampliam resultados obtidos no ‘Estudo sobre intuições probabilísticas’. Também neste estudo, os alunos recorreram a comparações baseadas em contagens para comparar probabilidades de acontecimentos no contexto de urnas, revelaram intuições pouco fiáveis e limitadas no subtema de probabilidades em experiências compostas e pouco frequentemente referiram 'raciocínios gerais'.

Ampliam-se os resultados obtidos no estudo anterior no que concerne à distinção entre acontecimentos quase certos e certos e entre acontecimentos quase impossíveis e impossíveis, e em relação à probabilidade em experiências simples no contexto de roletas. No primeiro caso, o alunos referiram raciocínios pouco fiáveis e limitados e no, segundo caso, manifestaram dificuldades consideráveis na avaliação de probabilidades de acontecimentos envolvendo os conectivos *e*, *ou* e *não*.

O impacto do ensino de probabilidades sobre as intuições probabilísticas, observado no presente estudo, foi também verificado no estudo de Fischbein e Gazit (1984) e no estudo de Agnoli (1987).

Tal como a estratégia de ensino baseada nas intuições, implementada no presente estudo, também uma estratégia de ensino destacando os conceitos clássico e frequencista de probabilidade e promovendo a actividade dos alunos em pequenos grupos (Saughnessy, 1977) e uma estratégia de ensino baseada na mudança conceptual (Castro, 1998) revelaram-se estratégias mais eficazes para lidar com as intuições dos alunos, quando comparadas com um ensino tradicional.

2. Respostas correctas. No pós-teste o grupo experimental obteve em todas as questões uma percentagem de respostas correctas superior ao grupo de controlo. Em termos de significância estatística, o teste χ^2 determinou diferenças entre os dois grupos em oito das quinze questões.

Considerando o número de respostas correctas em cada subtema e no questionário, o teste de Mann-Whitney determinou sempre diferenças estatisticamente significativas. Tomando ainda o número de respostas correctas no pré-teste e no pós-teste, a aplicação da análise de variância de dois factores com medidas repetidas na variável respostas correctas determinou diferenças estatisticamente significativas na variável metodologia de ensino, na variável respostas correctas e ao nível da interacção entre as variáveis. Em consequência, concluiu-se que o grupo experimental progrediu mais do que o grupo de controlo.

Em termos de desempenho em matemática, no pós-teste, o teste de Kruskal-Wallis determinou diferenças estatisticamente significativas em quatro dos cinco subtemas e no questionário, tanto no grupo experimental como no grupo de controlo, correspondendo ao melhor desempenho em matemática um maior número de respostas correctas. Do pré-teste para o pós-teste, em ambos os grupos, a partir da análise de variância de dois factores com medidas repetidas na variável respostas correctas, obtiveram-se diferenças estatisticamente significativas na variável desempenho em matemática, na variável respostas correctas e ao nível da interacção entre as variáveis. Em termos de progressão dos alunos, entre o pré-teste e o pós-teste, verificou-se que, no grupo experimental, os alunos de desempenho médio e elevado progrediram de forma semelhante e mais do que os alunos de baixo desempenho, e, no grupo de controlo, o progresso aumentou sistematicamente com o desempenho.

No caso da variável sexo, no pós-teste, verificou-se que o teste de Mann-Whitney não determinou diferenças estatisticamente significativas entre os sexos em relação ao número total de respostas correctas no questionário, tanto no grupo experimental como no grupo de controlo. Analogamente, do pré-teste para o pós-teste, a análise de variância de dois factores com medidas repetidas na variável respostas correctas determinou diferenças estatisticamente significativas na variável respostas correctas e não determinou diferenças estatisticamente significativas na variável sexo nem ao nível da interacção entre as variáveis, quer no grupo experimental, quer no grupo de controlo. Apesar de não estatisticamente significativa, verificou-se uma interacção mais acentuada no grupo experimental, o que se explica pelo facto das diferenças observadas entre os sexos no pré-teste terem desaparecido no pós-teste. Já no grupo de controlo não se observaram diferenças, quer no pré-teste, quer no pós-teste.

Tal como no presente estudo, também os estudos de Fischbein e Gazit (1984) e de Agnoli (1987) revelaram um impacto considerável na selecção das respostas correctas.

Também nos estudos de Castro (1998) e de Saughnessy (1977), comparativamente com um ensino tradicional, as condições de ensino experimental revelaram um maior impacto na selecção das respostas correctas, como aconteceu no presente estudo.

3. Cálculo de probabilidades. Em relação às classificações obtidas pelos alunos numa ficha dirigida à avaliação escolar dos alunos no tema de 'Estatística e probabilidades' do 9º ano de escolaridade, destaca-se que os alunos do grupo experimental obtiveram médias das cotações ligeiramente superiores em quatro questões e muito superiores numa questão. Em termos de significância estatística, o teste t de Student determinou diferenças na questão sobre probabilidades em experiências compostas e na ficha de avaliação.

Tanto no grupo experimental como no de controlo, a aplicação da análise de variância determinou diferenças estatisticamente significativas entre as médias correspondentes aos diferentes níveis de desempenho em matemática. Estas diferenças mantiveram-se ainda significativas entre as médias de quaisquer dois níveis de desempenho.

Em relação à variável sexo, o teste t de Student não determinou diferenças estatisticamente significativas no grupo experimental e determinou diferenças estatisticamente significativas, favoráveis ao sexo feminino, no grupo de controlo.

O maior impacto da condição de ensino experimental, em relação à condição de ensino tradicional, foi também observado no estudo de Castro (1998).

Em relação ao cálculo de probabilidades e estatística, Shulte (1968) concluiu tratar-se de um tema adequado aos alunos do 9º ano, embora o seu ensino não possa ser justificado com base no maior interesse dos alunos nem pelo facto de facilitar o desenvolvimento de *skills* de cálculo.

Dos resultados apresentados, retira-se a seguinte conclusão:

Conclusão 4. Intuições probabilísticas. Ao nível das intuições probabilísticas, o impacto das duas estratégias de ensino manifestou-se na maior adesão a 'raciocínios gerais', que praticamente não foram referidos pelos alunos antes do ensino, e na menor adesão a comparações baseadas em contagens, à causalidade e ao facto de os acontecimentos serem possíveis.

Exceptuando o subtema 'Acontecimentos quase certos e quase impossíveis: contexto de moedas', em que os raciocínios se revelaram pouco fiáveis, o tratamento experimental teve um maior impacto na adopção de 'raciocínios gerais', na diminuição da adesão a comparações baseadas em contagens e na referência ao facto de os acontecimentos serem possíveis, comparativamente com o tratamento de controlo.

Respostas correctas. De entre as duas estratégias de ensino, a estratégia que contemplou as intuições probabilísticas teve um maior impacto na selecção das respostas correctas. Em ambas as condições de ensino, a selecção das respostas correctas foi influenciada pelo desempenho em matemática, correspondendo ao melhor desempenho um maior número de respostas correctas. Além disso, do pré-teste para o pós-teste, os progressos foram mais regulares na condição de ensino experimental do que na condição de ensino tradicional. Já no caso da variável sexo, não se salientaram diferenças em qualquer das condições de ensino. Todavia, do pré-teste para o pós-teste, o tratamento experimental equilibrou os dois sexos quanto ao número de respostas correctas, pois no pré-teste os alunos do sexo masculino seleccionaram mais frequentemente a resposta correcta. No tratamento de controlo, manteve-se o equilíbrio entre os dois sexos observado no pré-teste.

Cálculo de probabilidades. O tratamento experimental teve um maior impacto na realização dos alunos em cálculo de probabilidades no subtema 'Probabilidade em experiências compostas', tendo-se repercutido este impacto na globalidade da ficha de avaliação.

Em ambas as condições de ensino, verificou-se que ao melhor desempenho em matemática correspondeu também uma maior realização na ficha de avaliação. Já no caso da variável sexo, também em relação à realização na ficha de avaliação, verificou-se que o tratamento experimental não distinguiu os alunos de ambos os sexos, enquanto o tratamento de controlo foi favorável aos alunos do sexo feminino.

5.4. Recomendações

Com base nos dois estudos realizados, apresentam-se algumas recomendações, quer para o ensino de probabilidades, quer para a realização de estudos futuros.

5.4.1. O ensino de probabilidades

Recomendação 1. Não deve ser assumido que os alunos possuem uma definição clara dos termos "certo", "possível", "impossível", "provável", "muito provável" e "pouco provável". As dificuldades dos alunos foram mais notórias na distinção entre acontecimentos certos e quase certos e entre acontecimentos impossíveis e quase impossíveis. Neste último caso, a verificação de que não se trata de um acontecimento certo ou impossível, respectivamente, pode constituir uma estratégia para ajudar os alunos a vencer tais dificuldades.

Recomendação 2. A promoção do raciocínio proporcional para avaliar probabilidades pode beneficiar com a demonstração da ineficácia de raciocínios baseados em comparações resultantes de contagens e com a exploração subsequente de esquemas de comparações multiplicativas.

Recomendação 3. O estudo de acontecimentos envolvendo os conectivos *e*, *ou* e *não* deve ser efectuado ao longo de todo o tema, procurando-se que os alunos verbalizem e discutam os seus significados. Para além do tema de probabilidades, a correcta compreensão e utilização destes conectivos é da maior importância na matemática em geral, e mesmo em outras disciplinas.

Recomendação 4. As dificuldades sentidas pelos alunos nas probabilidades em experiências compostas no contexto de urnas explicam-se pela multiplicidade de condicionantes envolvidas: a possibilidade de realização de um acontecimento de várias maneiras diferentes em cada experiência simples, a extracção simultânea *versus* extracção consecutiva, ordem *versus* não ordem e reposição *versus* não reposição. Estas dificuldades aconselham que se preste uma atenção especial a todos estes aspectos no ensino, implicando um maior tempo para explorar situações diversificadas e enfatizando representações através de diagramas de árvore, de tabelas de dupla entrada e de esquemas simples de contagem e de probabilidade.

Recomendação 5. O estudo de probabilidades ao nível do 9º ano de escolaridade deve contemplar os três subtemas tratados nestes estudos, apesar das dificuldades reveladas pelos alunos nas probabilidades em experiências compostas. A não inclusão deste subtema no ensino implicaria que o estudo das probabilidades assumisse um carácter excessivamente trivial e, consequentemente, não merecedor de fazer parte do ensino (Steinbring, 1989). A maior ênfase dada ao estudo deste tema devia ainda incluir a equivalência de estruturas estocásticas (Fischbein, Nello & Marino, 1991).

Apresenta-se, seguidamente, uma proposta de conteúdos a abordar no tema de probabilidades ao nível do 9º ano de escolaridade, partindo, fundamentalmente, dos resultados do estudo efectuado e pressupondo mais tempo disponível para a sua realização, em relação ao que está estabelecido nos programas oficiais actuais (Ministério da Educação, 1991b).

Proposta de conteúdos a abordar ao nível do 9º ano de escolaridade

1. Termos e conceitos probabilísticos (conceitos clássico e subjectivista)

- *1.1.* Objecto das probabilidades: experiências aleatórias, casuais ou fortuitas e experiências deterministas ou causais.
- *1.2.* Acontecimentos certos, muito prováveis, prováveis, poucos prováveis e impossíveis. Distinção entre acontecimentos quase certos e certos e entre acontecimentos quase impossíveis e impossíveis.
- *1.3.* Atribuição de um valor de probabilidade a um acontecimento. Carácter objectivo e subjectivo do valor de probabilidade.
- *1.4.* Acontecimentos envolvendo os conectivos *e*, *ou* e *não*.

2. Probabilidade em experiências simples (conceitos clássico, frequencista e subjectivista)

- *2.1.* Avaliação intuitiva de probabilidades.

2.2. Conceito clássico de probabilidade ou probabilidade *a priori*: exploração de objectos aleatórios comuns.

2.3. Estruturas estocásticas equivalentes.

2.4. Conceito frequencista de probabilidade ou probabilidade *a posteriori*: exploração de objectos aleatórios comuns, para relacionar os conceitos frequencista e clássico de probabilidade, e de situações do dia-a-dia, para aplicação do conceito frequencista.

2.5. Probabilidades de acontecimentos envolvendo os conectivos *e*, *ou* e *não*.

2.6. Dependência estocástica por restrição do espaço amostral.

3. Probabilidade em experiências compostas (conceitos clássico, frequencista e subjectivista)

3.1. Avaliação intuitiva de probabilidades.

3.2. O conceito frequencista de probabilidade como meio de validar ou refutar intuições e como primeira etapa na explicitação dos casos possíveis, dos casos favoráveis e do cálculo de probabilidades pela lei de Laplace.

3.3. Cálculo de probabilidades *a priori*, recorrendo à representação do espaço amostral através de diagramas de árvore e de tabelas de dupla entrada e ao uso de esquemas que relacionem a probabilidade numa experiência composta com as probabilidades nas experiências simples envolvidas.

3.4. Dependência e independência estocástica: extracção com e sem reposição e lançamento simultâneo e consecutivo de objectos aleatórios.

Relativamente aos acontecimentos que envolvem os conectivos *e*, *ou* e *não* deve encarar-se o seu estudo como o de qualquer outro acontecimento, não se incluindo qualquer relação formal entre as probabilidades envolvidas, como, por exemplo, a lei da adição de probabilidades ou a lei da probabilidade do acontecimento contrário.

Recomendação 6. Na formação de professores, para além da vantagem de uma formação mais profunda ao nível dos conteúdos de probabilidades e estatística, este estudo destaca também outros aspectos igualmente importantes, designadamente: o conhecimento e compreensão das intuições dos alunos, as limitações de um ensino tradicional para lidar com as intuições e o estabelecimento de estratégias de ensino capazes de vencer e substituir intuições inadequadas.

5.4.2. Realização de estudos futuros

Face à 'Proposta de conteúdos a abordar ao nível do 9º ano de escolaridade' no tema de probabilidades, anteriormente especificada, apresentam-se sugestões de futuros estudos, especialmente em relação a aspectos menos sucedidos ou não tratados nos dois estudos realizados.

Efeito de mistura. Em ambos os estudos, no subtema de probabilidades em experiências simples – contexto de urnas, alguns alunos afirmaram ser mais provável obter uma bola de uma dada cor do saco com o menor número total de bolas.

No sentido de aprofundar este resultado, sugere-se o estudo da hipótese de que para estes alunos seria mais fácil obter o resultado pretendido em virtude de um menor efeito de mistura. Para tal, poder-se-iam confrontar os alunos com situações em que se altere de forma mais sistemática o número de bolas dos sacos, considerando, por exemplo, três sacos em que se vai aumentando o número de bolas de ambas as cores. Além disso, seria desejável alargar o estudo a outros contextos, como, por exemplo, roletas e dados.

A realização de um tal estudo poderia também constituir uma oportunidade para estudar, de forma mais sistemática, em que medida os alunos recorrem a raciocínios aditivos para avaliar probabilidades.

Estruturas estocásticas equivalentes. Muito embora Fischbein, Nello e Marino (1991) tenham observado que alunos italianos possuem intuições correctas acerca de estruturas estocásticas equivalentes, parece recomendável confirmar este resultado junto de alunos portugueses.

No caso das experiências compostas, este estudo pode contribuir também para revelar possíveis ideias dos alunos acerca da dependência/independência estocástica e da causalidade. Por exemplo, no contexto de moedas, podemos explorar lançamentos simultâneos e lançamentos consecutivos de moedas e avaliar a dependência/independência do resultado de um lançamento em relação a outros, considerando ainda a possibilidade de usar moedas iguais ou diferentes. De modo análogo, podemos explorar o contexto de dados e o contexto de urnas, considerando, neste último contexto, a extracção com e sem reposição e a possibilidade de tirar as bolas de uma só vez ou uma bola de cada vez.

O ensino de probabilidades em experiências compostas. Dos três temas tratados no ‘Estudo sobre o ensino de probabilidades’, obtiveram-se resultados menos expressivos no subtema ‘Probabilidade em experiências compostas: contexto de urnas’. Em termos de grandeza absoluta, os resultados obtidos ao nível das intuições foram inferiores aos obtidos em termos de cálculo de probabilidades.

Um futuro estudo sobre o ensino deste subtema deveria contemplar mais tempo do que aquele que lhe foi dedicado neste estudo (5 aulas, cada uma com a duração de 50 minutos), de modo a permitir a exploração de exemplos diversificados e a abordagem sistemática de diferentes estratégias de resolução.

Embora no presente estudo se tenha optado também por explorar uma mesma situação de probabilidade a partir de estratégias diferentes, o tempo disponível não permitiu explorar um leque variado de exemplos nem discutir as estratégias de resolução tão profundamente quanto seria desejável.

Especificamente no contexto de urnas, no sentido de ajudar os alunos a abandonarem raciocínios baseados em comparações entre o número de bolas de cada cor, sugere-se a exploração de exemplos extremos. Por exemplo, se um aluno afirma que é mais provável ‘obter duas bolas brancas’ do que ‘obter uma bola branca e uma bola preta’, porque na urna há mais bolas brancas do que pretas, pode-se confrontar os alunos com uma urna com duas bolas brancas e uma bola preta. No caso da equiprobabilidade, consequência do igual número de bolas de ambas as cores, pode-se confrontar os alunos com uma urna com uma bola de cada cor.

Comparativamente com outros objectos físicos, os aparatos de canais bifurcados constituem meios facilitadores de introdução do cálculo de probabilidades em experiências compostas, pois, neste caso, a questão da ordem dos resultados não se coloca. Consequentemente, representações destes aparatos, que foram pouco exploradas neste estudo, podem ser mais usadas em estudos futuros.

B I B L I O G R A F I A

Agnoli, F. (1987). Teaching implications of misconceptions in probability and statistics. In J. Novak (ed.), *Proceedings of the Second International Seminar, Misconceptions and Strategies in Science and Mathematics*, (Vol. I, pp. 1-5). Ithaca, New York: Cornell University.

Ahlgren, A. & Garfield, J. (1991). Analysis of the probability curriculum. In R. Kapadia & M. Borovcnik (eds.), *Chance encounters: probability in education* (pp. 107-131). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

American Statistical Association (1994). *Teaching statistics*: *Guidelines for elementary through high school*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Amir, R., Frankl, P. R. & Tamir, P. (1987). Justifications of answers to multiple choice items as a means for identifying misconceptions. In J. Novak (ed.), *Proceedings of the Second International Seminar, Misconceptions and Strategies in Science and Mathematics*, (Vol. I, pp. 15-25). Ithaca, New York: Cornell University.

Ausubel, D., Novak, J. & Hanesian, H. (1980). *Psicologia educacional*. Rio de Janeiro: Interamericana.

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Barker, S. F. (1969). *Filosofia da matemática*. Rio de Janeiro: Zahar Editores.

Bentz, H.-J. (1983). Stochastics teaching based on commom sense. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G. M. Constable (eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol 2, pp. 753-765). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Biehler, R. (1991). Computers in probability education. In R. Kapadia & M. Brorvcnik (eds.), *Chance encounters: probability in education* (pp. 169-211). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Borovcnik, M. & Peard, R. (1996). Probability. In A. J. Bishop et al. (eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 239-287). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Borovcnik, M. (1985). The role of descriptive statistics. In A. Bell, B. Low & J. Kilpatrick (eds.), *Theory, research and practice in mathematical education* (pp. 285-292). Nottingham, UK: Shell Centre for Mathematical Education.

Borovcnik, M. (1987). Revising probabilities according to new information. In R. Davidson & J. Swift (eds.), *The Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 298-302). The Second International Committe on Teaching Statistics, University of Victoria.

Borovcnik, M. (1991). A complementary between intuitions and mathematics. In D. Vere-Jones (ed.), *The Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (Vol. 1, pp. 363-369). Vooburg: International Statistical Institute.

Borovcnik, M. (1991). Curriculum developments in German speaking countries. In D. Vere-Jones (ed.), *The Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (vol. 1, pp. 84-87). Vooburg: International Statistical Institute.

Borovcnik, M., Bentz, H.-J. & Kapadia, R. (1991). A probabilistic perspective. In R. Kapadia & M. Borovcnik (eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 27-71). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Brainerd, C. J. (1981). Working memory and the developmental analysis of probability judgment. *Psychological Review*, *88*(6), 463-502.

Brown, D. E. & Clement, J. (1987). Misconceptions concerning Newton's law of action and reaction: The underestimated importance of the third law. In J. Novak (ed.), *Proceedings of the Second International Seminar, Misconceptions and Strategies in Science and Mathematics*, (Vol. III, pp. 39-53). Ithaca, New York: Cornell University.

Bruner, J. S. (s/d). *O processo da educação*. São Paulo: Companhia Editora Nacional. (Original de 1965.)

Burns, M. & Hunphreys, C. (1990). *A collections of math lessons: From grades 6 through 8*. New York: Math Solutions Publications.

Burrill, G. (1990). Implementing the Standards: Statistics and probability. *Mathematics Teacher*, *83*(12), 113-118.

Castro, C. S. (1998). Teaching probability for conceptual change. *Educational Studies in Mathematics*, *35*, 233-254.

Cathcart, G. & Kirkpatrick, J. (Eds.) (1979). *Organizing data and dealing with uncertainty*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Chiu, M. M. (1996). Exploring the origins, uses, and interactions of students intuitions: Comparing the lengths of paths. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 478-504.

Clement, J. (1987). Overcoming students' misconceptions in physics: The role of anchoring intuitions and analogical validity. In J. Novak (ed.), *Proceedings of the Second International Seminar, Misconceptions and Strategies in Science and Mathematics*, (Vol. I, pp. 84-97). Ithaca, New York: Cornell University.

Courant, R. & Robbins, H. (1996). *What is mathematics?: an elementary approach to ideas and methods*. New York: Oxford University Press. (Publicação revista por Ian Stewart, original de 1941.)

Cox, C. & Mouw, J. T. (1992). Disruption of the representativeness heuristic: Can we be perturbed into using correct probabilistic reasoning? *Educational Studies in Mathematics*, *23*, 163-178.

Davidson, R. & Swift, J. (eds.) (1988). *Proceedings of the second international conference on teaching statistics*. Victoria, BC: University of Victoria.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática* (trad. portuguesa). Lisboa: Gradiva (Original de 1981).

Descartes, R. (1989). *Regras para a direcção do espírito*. Lisboa: Edições 70.

Duarte, M. C. (1987). *Ideias alternativas e aprendizagem de conceitos: um estudo sobre propriedades do ar em alunos do ensino preparatório*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.

Falk, R. & Konold, C. (1992). The pshycology of learning probability. In F. Gordon & S. Gordon (eds.), *Statistics for the twuenty-first century, MAA Notes 26* (pp. 151-164). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Falk, R. (1989). Inference under uncertainty via conditional probabilities. In *Teaching statistics in schools* (Vol. 7 de *Studies of mathematics education*, pp. 174-184). Paris: UNESCO.

Falk, R. (1992). A closer look at the probabilities of the notorious three prisoners. *Cognition*, *43*, 197-223.

Falk, R., Falk, R. & Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics*, *11*, 181-204.

Fast, G. R. (1997). Using analogies to overcome student teachers' probability misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 325-344.

Ferguson, G. A. & Takane, Y. (1989). *Statistical analysis in psychology and education*. New York: McGraw-Hill.

Fernandes, J. A. & Almeida, C. (1993). Vantagens pedagógicas da perspectiva frequencista de probabilidade. *Educação e Matemática*, 25, 27-30 e 36.

Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.

Fernandes, J. A. (1998). Orientações para o ensino de probabilidades. In Comissão Organizadora do ProfMat 98 (Orgs.), *Actas do ProfMat 98* (pp. 81-88). Lisboa: APM.

Fischbein, E. & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilitisc intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 1-24.

Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 96-105.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1990). Intuition and information processing in mathematical activity. *International Journal of Educational Research*, *14*, 31-50.

Fischbein, E., Barbat, I. & Mînzat, I. (1975). Primary and secondary intuitions in the introduction of probability. In E. Fischbein, *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Appendix I, pp. 138-155). Dordrecht: D. Reidel Publishing Company (Artigo publicado em 1971).

Fischbein, E., Nello, M. S. & Marino, M. S. (1991). Factors afecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 523-549.

Fischbein, E., Pampu, I. & Mînzat, I. (1975a). The child's intuition of probability. In E. Fischbein, *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Appendix II, pp. 156-174). Dordrecht: D. Reidel Publishing Company (Artigo publicado em 1967).

Fischbein, E., Pampu, I. & Mînzat, I. (1975b). Comparison of ratios and the chance concept in chilgren. In E. Fischbein, *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Appendix III, pp. 175-188). Dordrecht: D. Reidel Publishing Company (Artigo publicado em 1970).

Fischbein, E., Tirosh, D. & Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 491-512.

Fisher, R. (1988). Didactics, mathematics, and communication. *For the Learning of Mathematics*, *8*(2), 20-30.

Fox, J. D. (1987). *El proceso de investigación en educación*. Pamplona: Ediciones Universidad de Navarra.

Freudenthal, H. (1972). The 'Empirical law of large numbers' or 'The stability of frequencies'. *Educational Studies in Mathematics*, *4*, 484-490.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gagné, R. M. (1970). *Conditions of learning*. New York: Holt, Rinehart, & Winston.

Gall, M. D., Borg, W. R. & Gall, J. P. (1996). *Educational research: An introduction*. New York: Longman Publishers USA.

García, J. L. A. & García, A. E. G. (1995). El azar y la probabilidad en ESO. *UNO*, *3*, 123-134.

Garfield, J. B. & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*, 44-63.

Gil, D. & Carrascosa, J. (1990). What do about science “misconceptions”. *Science Education*, *74*(5), 531-540.

Glaymann, R. J. & Varga, T. (1975). *Les probabilités à l'école*. Paris: CEDIC.

Gnanadesikan, M., Scheaffer, R. L. & Swift, J. (1987). *The art and techniques of simulation*. Palo Alto, CA: Dale Seymour.

Godino, J. D., Batanero, M. & Canizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Editorial Sintesis.

Gordon, F. & Gordon, S. (eds.) (1992). *Statistics for the twuenty-first century, MAA Notes 26*. Whashington, DC: Mathematical Association of America.

Gordon, M. (1991). Counterintuitive instances encourage mathematical thinking. *Mathematics Teacher*, *84*(7), 511-515.

Green., D. R. (1982). Probability concepts in 11-16 year old pupils. Centre for Advancement of Mathematical Education in Technology, Loughborough University of Technology.

Green., D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G. M. Constable (eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol. 2, pp. 766-783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Grey, D. R., Holmes, P., Barnett, V. & Constable, G. M. (eds.) (1983). *Proceedings of the first international conference on teaching statistics*. Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability*. London: Cambridge University Press.

Hadamard, J. (1954). *The psychology of invention in the mathematical field*. New York: Dover Publications.

Hahn, H. (1974). Geometria e intuición. In Morris Kline (ed.), *Matemáticas en el mundo moderno* (pp. 208-213). Madrid: Editorial Blume.

Hawkins, A. & Kapadia, R. (1984). Children's conceptions of probability – a psychological and pedagogical review. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 349-377.

Hoemann, H. W. & Ross, B. M. (1982). Children's concepts of chance and probability. In Charls J. Brainerd (ed.), *Children's logical and mathematical cognition*. New York: Springer-Verlag.

Hogg, R. V. (1992). Towards lean and lively courses in statistics. In F. Gordon & S. Gordon (eds.), *Statistics for the twuenty-first century, MAA Notes 26* (pp. 3-13). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Holmes, P. & Turner, D. (1981). Teaching statistics to eleven-to-sixteen-year olds. In A. P. Shulte (ed.), *Teaching statistics and probability* (1981 Yearbook, pp. 18-24). Reston, VA: NCTM.

Inhelder, B. (1977). The development of the concepts of chance and probability in children. In W. F. Overton & J. M. Gallagher (eds.), *Advances in research and theory* (pp. 43-57). New York: Plenum Press.

Inhelder, W. (1981). Solving probability problems through computer simulations. In A. P. Shulte (ed.), *Teaching statistics and probability* (1981 Yearbook, pp. 220-224). Reston, VA: NCTM.

Kader, G. (1991). Simulations in mathematics-probability and computing. In D. Vere-Jones (ed.), *Proceedings of the third international conference on teaching statistics* (Vol. 1, pp. 178-186). Vooburg: International Statistical Institute.

Kahneman, D. & Tversky, A. (1982). On the study of statistical intuitions. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 493-508).Cambridge: Cambridge University Press.

Kahneman, D., Slovic, P. & Tversky, A. (eds.) (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*.Cambridge: Cambridge University Press.

Kant, I. (1989). *Crítica da razão pura*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Kellogg, H. (1981). In all probability, a computer. In A. P. Shulte (ed.), *Teaching statistics and probability* (1981 Yearbook, pp. 225-233). Reston, VA: NCTM.

Kline, M. (1980). *Mathematics: The loss of certainty*. New York: Oxford University Press.

Konold, C. (1983). *Conceptions of probability: Reality between a rock and a hard place*. Doctoral dissertation, University of Massachusetts, Amherst, Massachusets.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. In E. von Glasersfeld (ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Konold, C. (1994). Teaching probability through modeling real problems. *The Mathematics Teacher*, *87*(4), 232-235.

Konold, C., Pollatsek, A., Well, A., Lohmeier, J. & Lipson, A. (1993). Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(5), 392-414.

Krüger, L., Daston, L. J. & Heidelberger, M. (eds.) (1987). *The probabilistic revolution* (Vol. 1: Ideas in history). Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Landewehr, J. & Watkins, A. E. (1986). *Exploring data*. Palo Alto, CA: Dale Seymour.

Landewehr, J., Watkins, A. E. & Swift, J. (1987). *Exploring surveys: Information from samples*. Palo Alto, CA: Dale Seymour.

Leake, L. (1962). The status of three concepts of probability in children of the seventh, eighth, and ninth grades (Doctoral dissertation, University of Wisconsin, 1962). *Dissertation Abstracts*, *23*, 2010.

Lecoutre, M.-P. & Durant, J-L. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, *19*, 357-368.

Leite, L. S. F. (1993). *Concepções alternativas em mecânica: um contributo para a compreensão do seu conteúdo e persistência*. Dissertação de doutoramento não publicada, Universidade do Minho, Braga.

Lesser, L. (1998). Countering indifference – Using counterintuitive examples. *Teaching Statistics*, *20*(1), 10-12.

Lesser, L. M. (1995). The role of counterintuitive examples in statistics education (Doctoral dissertation, University of Texas at Austin, 1994), *Dissertation Abstracts*, *55*(10A), 3126-A.

Matalon, B. (1980). Epistemologia das probabilidades. In J. Piaget (ed.), *Lógica e conhecimento científico*. Porto: Livraria Civilização-Editora.

Matos, J. M. (1989). *Cronologia recente do ensino da matemática*. Lisboa: APM.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. In Douglas A. Grrouws (ed.), *Handbooh of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). New York: Macmillan Publishing Company.

Ministério da Educação (1991a). *Programa de matemática do 2º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação (1991b). *Programa de matemática do 3º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação (1992). *Programas de matemática e métodos quantitativos*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação (1997). *Matemática – Programa do 10º, 11º e 12º anos*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação e Ciência (1980). *Programa de matemática do 12º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Ministério da Educação e Cultura (1979a). *Programa da disciplina de matemática, 11º ano de escolaridade – Áreas A, B, C e E*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

Ministério da Educação e Cultura (1979b). *Programa da disciplina de matemática, 10º ano de escolaridade – Área D*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

Ministério da Educação e Investigação Científica (1980). *Programa mínimo da disciplina de matemática, 11º ano de escolaridade – Áreas A, B, C e E*. Lisboa: Ministério da Educação e Investigação Científica.

Munisamy, S. & Doraisamy, L. (1998). Levels of understanding of probability concepts among secondary school pupils. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology*, *29* (1), 39-45.

Narode, R. (1987). Standardized testing for misconceptions in basic mathematics. In J. Novak (ed.), *Proceedings of the Second International Seminar, Misconceptions and Strategies in Science and Mathematics*, (Vol. I, pp. 322-333). Ithaca, New York: Cornell University.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar* (trad. portuguesa). Lisboa: APM e IIE.

Neves, M. A. & Faria, M. L. (1997). *Matemática 9º ano*. Porto: Porto Editora.

Newman, C. M., Obremski, T. E. & Scheaffer, R. L. (1987). *Exploring probability*. Palo Alto, CA: Dale Seymour.

Nisbett, R. E., Krantz, D. H. Jepson, C. & Kunda, Z. (1983). The use of statistical heuristics in everyday inductive reasoning. *Psychological Review*, *90*, 339-363.

Orton, R. E. (1988). Using subjective probability to introduce probability concepts. *School Science and Mathematics*, *88*(*2*), 105-112.

Pereira-Mendoza, L. & Swift, J. (1981). Why teach statistics and probability – a rationale. In A. P. Shulte (ed.), *Teaching statistics and probability* (1981 Yearbook, pp. 1-7). Reston, VA: NCTM.

Pestana, D. D. (1998). Localização e escala ou vamos mentir com estatística. *Boletim da SPM*, *39*, 93-121.

Phillips, E., Lappan, G., Winter, M. J. & Fitzgerald, W. (1986). *Probability*. Menlo Park, CA: Addison-Wesley.

Piaget, J. & Beth, E. W. (1980). *Epistemología matemática y psicología*. Barcelona: Editorial Crítica. (Original de 1961.)

Piaget, J. & Inhelder, B. (s/d). *A origem da ideia do acaso na criança*. Rio de Janeiro: Editora Record. (Original de 1951.)

Poincaré, H. (1932). *La valeur de la science*. Paris: Ernest Flammarion.

Poincaré, H. (1974). La creación matemática. In Morris Kline (ed.), *Matemáticas en el mundo moderno* (pp. 14-17). Madrid: Editorial Blume.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. & Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, *40*, 255-269.

Ponte, J. P., Matos, J. M. & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Precatado, A. *et al*. (1998). *Matemática 2001 – Recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática*. Lisboa: APM e IIE.

Scholz, R. W. & Waller, M. (1987). Conceptual and theoretical issues in developmental research on the acquisition of the probability concept. In R. W. Scholz (ed.), *Decision making under uncertainty* (pp. 291-311). Amsterdam: North-Holland

Scholz, R. W. (1987). *Cognitive strategies in stochastic thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sebastião e Silva, J. (1964). *Compêndio de Matemática – Projecto de modernização do ensino da matemática no 3º ciclo liceal*. Lisboa: Ministério da Educação (Texto policopiado).

Sebastião e Silva, J. (1968/69). *História do pensamento matemático – apontamentos*. Lisboa: Texto policopiado.

Sebastião e Silva, J. (1975). *Compêndio de matemática* (1º vol. – 1º e 2º tomos, 2º vol. e 3º vol.). Lisboa: GEP.

Sebastião e Silva, J. (1975). *Guia para a utilização do compêndio de matemática* (1º vol.). Lisboa: GEP.

Sebastião e Silva, J. (1977). *Guia para a utilização do compêndio de matemática* (2º e 3º vols.). Lisboa: GEP.

Shaughnessy, J. M. (1977). Misconceptions of probability: An experiment with a small group, activity-based, model building approach to introductory probability at college level. *Educational Studies in Mathematics*, *8*, 295-316.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: reflections and directions. In Douglas A. Grrouws (ed.), *Handbooh of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan Publishing Company.

Shimojo, S. & Ichikawa, S. (1989). Intuitive reasoning about probability: Theoretical and experimental analyses of the "problem of three prisoners". *Cognition*, *32*, 1-24.

Shulte, A. P. (1968). Effect of a unit in probability and statistics on students and teacher of a ninth grade general mathematics class. (Doctoral dissertation, University of Michigan, 1967). *Dissertation Abstracts*, *28*, 4962A.

Shulte, A. P. (ed.) (1981). *Teaching statistics and probability* (1981 Yearbook). Reston, VA: NCTM.

Siegel, S. & Castellan, N. J. (1988). *Nonparametric statistics for the behavioral sciences*. New York: McGraw-Hill.

Siegler, R. S. (1981). Developmental sequences within and between concepts. In *Monographs of the Society for Research in Child Development*, *46*, *2*.

Snapper, E. (1984). The three crises in mathematics: Logicism, intuitionism, and formalism. In D. M. Campbell & J. C. Higgins (eds.), *Mathematics: People-problems-results* (pp. 183-193). Belmont, CA: Wadsworth International.

Steinbring, H. & v. Harten, G. (1983). Learning from experience – Bayes theorem: A model for stochastic learning situations? In D. Grey, P. Holmes, V. Barnett, & G. M. Constable (eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 701-713). Sheffield: University of Sheffield.

Steinbring, H. (1989). The interaction between teaching practice and theoretical conceptions: a co-operative model of in-service training in stochastics for mathematics teachers (graders 5-10). In *Teaching statistics in schools* (Vol. 7 de *Studies of mathematics education*, pp. 202-214). Paris: UNESCO.

Steinbring, H. (1991). The theoretical nature of probability in the classroom. In R. Kapadia & M. Brorvcnik (eds.), *Chance encounters: probability in education* (pp. 135-167). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Szendrei, J. (1990). Some aspects of teaching stochastics in Hungary. In I. Wirszup & R. Streit (eds.), *Developments in school mathematics education around the world* (Vol. II, pp. 262-281). Reston, VA: NCTM.

Travers, K. (1981). Using Monte Carlo methods to teach probability and statistics. In A. P. Shulte (ed.), *Teaching statistics and probability* (1981 Yearbook, pp. 210-219). Reston, VA: NCTM.

Travers, K. J., Pikaart, L., Suydam, M. N. & Runion, G. E. (1977). *Mathematics teaching.* New York: Harper & Row, Publishers.

Tukey, J. W. (1977). *Exploratory data analysis*. Reading: Addison-Wesley.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1982a). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 3-20). Cambridge: Cambridge University Press.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1982b). Causal schemas in judgment under uncertainty. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). Cambridge: Cambridge University Press.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, *90*(4), 293-315.

Veses, E. B. (1995). Procedimientos y recursos para trabajar la estadística y la probabilidad en la enseñanza obligatoria. *UNO*, *3*, 61-71.

Watkins, A. (1981). Monte Carlo simulation: probability the easy way. In A. P. Shulte (ed.), *Teaching statistics and probability* (1981 Yearbook, pp. 201-209). Reston, VA: NCTM.

Watkins, A., Burrill, G., Landwehr, J. M. & Scheaffer, R. L. (1992). Remedial statistics?: The implications for colleges of the changing secondary school curriculum. In F. Gordon & S. Gordon (eds.), *Statistics for the twuenty-first century, MAA Notes 26* (pp. 45-55). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Wilder, R. L. (1984). The role of intuition. In D. M. Campbell & J. C. Higgins (eds.), *Mathematics: People-problems-results* (pp. 37-45). Belmont, CA: Wadsworth International.

Wittmann, E. (1981). The complementary roles of intuitive and reflective thinking in mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 389-397.

Wonnacott, T. H. & Wonnacott, R. J. (1990). *Introductory statistics*. New York: John Wiley & Sons.

Zawojewski, J. S., Brooks, G. *et al*. (1992). *Dealing with data and chance* (Addenda Series, Grades 5-8). Reston, VA: NCTM.

A N E X O I

INSTRUMENTOS

Questionário-conceito clássico

Questionário-conceito frequencista

Questionário-experiência de ensino

Fichas de avaliação

QUESTIONÁRIO

Conceito clássico

Estimado(a) estudante,

Este questionário, a que venho pedir-lhe que responda, destina-se a efectuar um trabalho de investigação que me propus realizar no âmbito da minha dissertação de doutoramento, a qual se integra no domínio da Educação Matemática e cuja finalidade última é procurar melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática. Mais especificamente, procurar-se-á, com base nas respostas obtidas, identificar ideias que os alunos têm acerca do tema de Probabilidades.

Tratando-se de um trabalho de investigação, é da maior importância que responda de forma cuidada a todas as questões apresentadas no questionário. Mesmo que não tenha a certeza total de qual é a resposta correcta, não deixe de responder seleccionando a resposta que lhe parecer mais correcta.

Em relação às respostas que lhe são pedidas, deve considerar que não se destinam a classificar os seus conhecimentos em Probabilidades. Apesar disso, é da maior importância que leia atentamente o enunciado e que responda com sinceridade e de forma empenhada a todas as perguntas do questionário, pois um tal sentido de responsabilidade é indispensável à obtenção de resultados que traduzam a realidade. Neste contexto de responsabilização, eu, enquanto utilizador dos dados, comprometo-me a não fazer qualquer uso desta informação, a não ser em anonimato.

Muito obrigado pela colaboração

DADOS PESSOAIS[1]

Nome: ………………………………………………………………………………………

Escola: …………………………………………… *Ano*: ……… *Turma*: ……..

Idade: …….. *Sexo*: ☐Masculino ☐Feminino

Notas na disciplina de Matemática:

7º ano, 3º período ……. 8º ano, 1º período ……. 8º ano, 2º período …….

Indique as duas disciplinas de que mais gosta:

……………………………………. …………………………………….

Indique as duas disciplinas de que menos gosta:

……………………………………. …………………………………….

Assinale a afirmação que melhor corresponde às suas preferências em relação à disciplina de Matemática:

Não gosto nada	Não gosto	É-me indiferente	Gosto	Gosto muito
☐	☐	☐	☐	☐

[1] Esta página faz parte apenas do questionário passado aos alunos do 8º ano.

DADOS PESSOAIS(2)

Nome: ………………………………………………………………………………………

Escola: …………………………………………… *Ano*: ……… *Turma*: ……..

Idade: ……..   *Sexo*: ☐Masculino   ☐Feminino

Já alguma vez estudou Probabilidades? ☐Sim   ☐Não

Notas na disciplina de Matemática:

10º ano, 3º período …….   11º ano, 1º período …….

Indique as duas disciplinas de que mais gosta:

………………………………………   ………………………………………

Indique as duas disciplinas de que menos gosta:

………………………………………   ………………………………………

Assinale a afirmação que melhor corresponde às suas preferências em relação à disciplina de Matemática:

Não gosto nada	Não gosto	É-me indiferente	Gosto	Gosto muito
☐	☐	☐	☐	☐

---

(2) Esta página faz parte apenas do questionário passado aos alunos do 11º ano.

QUESTÕES

1. Um saco contém uma bola branca, uma bola preta e uma bola cinzenta. Sem ver, tira-se uma bola do saco.

Saco: ○ ● ◍

1.1. Diga se se obtém de certeza, se é possível obter ou se é impossível obter:

a) uma bola branca;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
b) uma bola cinzenta;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
c) uma bola vermelha;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
d) uma bola não verde;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
e) uma bola não preta.	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível

1.2. Com que confiança respondeu ao conjunto das cinco alíneas da pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

2. Lança-se um dado e conta-se o número de pintas da face que fica virada para cima.

2.1. Relativamente ao resultado do lançamento do dado, diga se se obtém de certeza, se é possível obter ou se é impossível obter:

a) um número par;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
b) um número menor do que 7;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
c) um número maior do que 6;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
d) um número maior do que 0;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
e) o número 5.	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível

2.2. Com que confiança respondeu ao conjunto das cinco alíneas da pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

3. Um saco contém uma bola branca, uma bola preta e uma bola cinzenta. Sem ver, tiram-se de uma só vez duas bolas do saco.

Saco: ○ ● ◍

3.1. Diga se se obtém de certeza, se é possível obter ou se é impossível obter:

a) uma bola branca e uma bola preta;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
b) duas bolas cinzentas;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
c) uma das duas bolas não cinzenta;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
d) uma bola branca e outra não branca;	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível
e) uma das duas bolas branca ou preta.	☐ de certeza	☐ é possível	☐ é impossível

3.2. Com que confiança respondeu ao conjunto das cinco alíneas da pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

4. Um saco I contém duas bolas brancas e três bolas pretas, e um saco II contém três bolas brancas e duas bolas pretas. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos.

Saco I: ○○●●●　　**Saco II**: ○○○●●

4.1. De qual dos sacos é mais provável obter uma bola branca?

☐ Do saco I.
☐ Do saco II.
☐ É igualmente provável obter uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

4.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

4.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

5. Um saco I contém duas bolas brancas e duas bolas pretas, e um saco II contém duas bolas brancas e três bolas pretas. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos.

Saco I: ○○●● **Saco II**: ○○●●●

5.1. De qual dos sacos é mais provável obter uma bola branca?

☐ Do saco I.
☐ Do saco II.
☐ É igualmente provável obter uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

5.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

5.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

6. Um saco I contém duas bolas brancas e uma bola preta, e um saco II contém três bolas brancas e duas bolas pretas. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos.

Saco I: ○○● **Saco II**: ○○○●●

6.1. De qual dos sacos é mais provável obter uma bola branca?

☐ Do saco I.
☐ Do saco II.
☐ É igualmente provável obter uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

6.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

6.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

7. Um saco I contém uma bola branca e uma bola preta, e um saco II contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos.

Saco I: ○● **Saco II**: ○○●●

7.1. De qual dos sacos é mais provável obter uma bola branca?

☐ Do saco I.
☐ Do saco II.
☐ É igualmente provável obter uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

7.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

7.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

8. Lança-se um dado e conta-se o número de pintas da face que fica virada para cima.

8.1. Qual das situações seguintes é mais provável?

☐ Obter o número 5.
☐ Obter um número ímpar.
☐ As duas situações anteriores são igualmente prováveis.

8.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

8.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

9. Lança-se um dado e conta-se o número de pintas da face que fica virada para cima.

9.1. Qual das situações seguintes é mais provável?

☐ Obter um número par.
☐ Obter um número ímpar.
☐ As duas situações anteriores são igualmente prováveis.

9.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

....
....
....
....
....
....
....
....
....

9.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

10. Um saco contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. Sem ver, tiram-se de uma só vez duas bolas do saco.

Saco: ○○●●

10.1. Qual das situações seguintes é mais provável?

☐ Obter duas bolas brancas.
☐ Obter uma bola branca e uma bola preta.
☐ As duas situações anteriores são igualmente prováveis.

10.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

....
....
....
....
....
....
....
....
....

10.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

11. Lançam-se dois dados de uma só vez e conta-se o número de pintas das faces que ficam viradas para cima.

11.1. Qual das situações seguintes é mais provável?

☐ Obter o número 5 num dado e o número 6 no outro dado.
☐ Obter o número 6 em ambos os dados.
☐ As duas situações anteriores são igualmente prováveis.

11.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

11.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

12. Lançam-se dois dados de uma só vez e conta-se o número de pintas das faces que ficam viradas para cima.

12.1. Qual das situações seguintes é mais provável?

☐ Obter números diferentes em cada um dos dados.
☐ Obter números iguais em ambos os dados.
☐ As duas situações anteriores são igualmente prováveis.

12.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

12.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

13. Lançam-se duas moedas ao ar de uma só vez e registam-se as faces que ficam viradas para cima.

13.1. Qual das situações seguintes é mais provável?

☐ Obter a face cara em ambas as moedas.
☐ Obter a face cara numa moeda e face escudo na outra moeda.
☐ As duas situações anteriores são igualmente prováveis.

13.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

13.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

14. Lançam-se três moedas ao ar de uma só vez e registam-se as faces que ficam viradas para cima.

14.1. Qual das situações seguintes é mais provável?

☐ Obter faces iguais em todas as três moedas.
☐ Obter faces diferentes em duas das três moedas.
☐ As duas situações anteriores são igualmente prováveis.

14.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

14.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

QUESTIONÁRIO

Conceito frequencista

Estimado(a) estudante,

Este questionário, a que venho pedir-lhe que responda, destina-se a efectuar um trabalho de investigação que me propus realizar no âmbito da minha dissertação de doutoramento, a qual se integra no domínio da Educação Matemática e cuja finalidade última é procurar melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática. Mais especificamente, procurar-se-á, com base nas respostas obtidas, identificar ideias que os alunos têm acerca do tema de Probabilidades.

Tratando-se de um trabalho de investigação, é da maior importância que responda de forma cuidada a todas as questões apresentadas no questionário. Mesmo que não tenha a certeza total de qual é a resposta correcta, não deixe de responder seleccionando a resposta que lhe parecer mais correcta.

Em relação às respostas que lhe são pedidas, deve considerar que não se destinam a classificar os seus conhecimentos em Probabilidades. Apesar disso, é da maior importância que leia atentamente o enunciado e que responda com sinceridade e de forma empenhada a todas as perguntas do questionário, pois um tal sentido de responsabilidade é indispensável à obtenção de resultados que traduzam a realidade. Neste contexto de responsabilização, eu, enquanto utilizador dos dados, comprometo-me a não fazer qualquer uso desta informação, a não ser em anonimato.

Muito obrigado pela colaboração

DADOS PESSOAIS

Nome: ………………………………………………………………………………………

Escola: …………………………………………… *Ano*: ……… *Turma*: ……..

Idade: …….. *Sexo*: ☐ Masculino ☐ Feminino

Notas na disciplina de Matemática:

7º ano, 3º período ……. 8º ano, 1º período ……. 8º ano, 2º período …….

Indique as duas disciplinas de que mais gosta:

…………………………………… ……………………………………

Indique as duas disciplinas de que menos gosta:

…………………………………… ……………………………………

Assinale a afirmação que melhor corresponde às suas preferências em relação à disciplina de Matemática:

Não gosto nada	Não gosto	É-me indiferente	Gosto	Gosto muito
☐	☐	☐	☐	☐

QUESTÕES

1. Um saco contém uma bola branca, uma bola preta e uma bola cinzenta. Sem ver, tira-se uma bola do saco. Depois de se colocar de novo a bola no saco, tira-se, sem ver, novamente uma bola do saco. Repete-se este processo um grande número de vezes.

Saco: ○ ● ◍

1.1. Diga se se obtém sempre , algumas vezes ou nunca:

a) uma bola branca;	☐ sempre	☐ algumas vezes	☐ nunca
b) uma bola cinzenta;	☐ sempre	☐ algumas vezes	☐ nunca
c) uma bola vermelha;	☐ sempre	☐ algumas vezes	☐ nunca
d) uma bola não verde;	☐ sempre	☐ algumas vezes	☐ nunca
e) uma bola não preta.	☐ sempre	☐ algumas vezes	☐ nunca

1.2. Com que confiança respondeu ao conjunto das cinco alíneas da pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

2. Lança-se um grande número de vezes um dado e conta-se, em cada lançamento, o número de pintas da face que fica virada para cima.

2.1. Diga se se obtém sempre , algumas vezes ou nunca:

a) um número par;	☐ sempre	☐ algumas vezes	☐ nunca
b) um número menor do que 7;	☐ sempre	☐ algumas vezes	☐ nunca
c) um número maior do que 6;	☐ sempre	☐ algumas vezes	☐ nunca
d) um número maior do que 0;	☐ sempre	☐ algumas vezes	☐ nunca
e) o número 5.	☐ sempre	☐ algumas vezes	☐ nunca

2.2. Com que confiança respondeu ao conjunto das cinco alíneas da pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

3. Um saco contém uma bola branca, uma bola preta e uma bola cinzenta. Sem ver, tiram-se de uma só vez duas bolas do saco. Depois de se colocarem de novo as duas bolas no saco, tiram-se, sem ver, novamente duas bolas do saco. Repete-se este processo um grande número de vezes.

Saco: ○ ● ◍

3.1. Diga se se obtém sempre , algumas vezes ou nunca:

a) uma bola branca e uma bola preta;	☐ sempre	☐ algumas vezes	☐ nunca
b) duas bolas cinzentas;	☐ sempre	☐ algumas vezes	☐ nunca
c) uma das duas bolas não cinzenta;	☐ sempre	☐ algumas vezes	☐ nunca
d) uma bola branca e outra não branca;	☐ sempre	☐ algumas vezes	☐ nunca
e) uma das duas bolas branca ou preta.	☐ sempre	☐ algumas vezes	☐ nunca

3.2. Com que confiança respondeu ao conjunto das cinco alíneas da pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

4. Um saco I contém duas bolas brancas e três bolas pretas, e um saco II contém três bolas brancas e duas bolas pretas. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos. Depois de se colocarem de novo as bolas nos respectivos sacos, tira-se, sem ver, novamente uma bola de cada um dos sacos. Repete-se este processo um grande número de vezes.

Saco I: ○ ○ ● ● ●   **Saco II**: ○ ○ ○ ● ●

4.1. De qual dos sacos se obtém mais vezes uma bola branca?

☐ Do saco I.

☐ Do saco II.

☐ Obtém-se aproximadamente o mesmo número vezes uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

4.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

4.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

5. Um saco I contém duas bolas brancas e duas bolas pretas, e um saco II contém duas bolas brancas e três bolas pretas. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos. Depois de se colocarem de novo as bolas nos respectivos sacos, tira-se, sem ver, novamente uma bola de cada um dos sacos. Repete-se este processo um grande número de vezes.

Saco I: ○○●● **Saco II**: ○○●●●

5.1. De qual dos sacos se obtém mais vezes uma bola branca?

☐ Do saco I.
☐ Do saco II.
☐ Obtém-se aproximadamente o mesmo número vezes uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

5.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………

5.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

6. Um saco I contém duas bolas brancas e uma bola preta, e um saco II contém três bolas brancas e duas bolas pretas. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos. Depois de se colocarem de novo as bolas nos respectivos sacos, tira-se, sem ver, novamente uma bola de cada um dos sacos. Repete-se este processo um grande número de vezes.

Saco I: ○○● **Saco II**: ○○○●●

6.1. De qual dos sacos se obtém mais vezes uma bola branca?

☐ Do saco I.
☐ Do saco II.
☐ Obtém-se aproximadamente o mesmo número vezes uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

6.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………

6.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

7. Um saco I contém uma bola branca e uma bola preta, e um saco II contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos. Depois de se colocarem de novo as bolas nos respectivos sacos, tira-se, sem ver, novamente uma bola de cada um dos sacos. Repete-se este processo um grande número de vezes.

Saco I: ○● **Saco II**: ○○●●

7.1. De qual dos sacos se obtém mais vezes uma bola branca?

- ☐ Do saco I.
- ☐ Do saco II.
- ☐ Obtém-se aproximadamente o mesmo número vezes uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

7.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

7.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

8. Lança-se um grande número de vezes um dado e conta-se, em cada lançamento, o número de pintas da face que fica virada para cima.

8.1. Qual dos resultados seguintes se obtém mais vezes?

- ☐ O número 5.
- ☐ Um número ímpar.
- ☐ Os dois resultados anteriores obtêm-se aproximadamente o mesmo número de vezes.

8.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

8.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

9. Lança-se um grande número de vezes um dado e conta-se, em cada lançamento, o número de pintas da face que fica virada para cima.

9.1. Qual dos resultados seguintes se obtém mais vezes?

☐ Um número par.
☐ Um número ímpar.
☐ Os dois resultados anteriores obtêm-se aproximadamente o mesmo número de vezes.

9.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

....
....
....
....
....
....
....

9.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

10. Um saco contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. Sem ver, tiram-se de uma só vez duas bolas do saco. Depois de se colocarem de novo as bolas no saco, tiram-se, sem ver, novamente duas bolas do saco. Repete-se este processo um grande número de vezes.

Saco: ○○●●

10.1. Qual dos resultados seguintes se obtém mais vezes?

☐ Duas bolas brancas.
☐ Uma bola branca e uma bola preta.
☐ Os dois resultados anteriores obtêm-se aproximadamente o mesmo número de vezes.

10.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

....
....
....
....
....
....
....

10.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

11. Lançam-se um grande número de vezes dois dados de uma só vez e conta-se, em cada lançamento, o número de pintas das faces que ficam viradas para cima.

11.1. Qual dos resultados seguintes se obtém mais vezes?

- ☐ O número 5 num dado e o número 6 no outro dado.
- ☐ O número 6 em ambos os dados.
- ☐ Os dois resultados anteriores obtêm-se aproximadamente o mesmo número de vezes.

11.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

....
....
....
....
....
....
....
....

11.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

12. Lançam-se um grande número de vezes dois dados de uma só vez e conta-se, em cada lançamento, o número de pintas das faces que ficam viradas para cima.

12.1. Qual dos resultados seguintes se obtém mais vezes?

- ☐ Números diferentes em cada um dos dados.
- ☐ Números iguais em ambos os dados.
- ☐ Os dois resultados anteriores obtêm-se aproximadamente o mesmo número de vezes.

12.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

....
....
....
....
....
....
....
....

12.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

13. Lançam-se um grande número de vezes duas moedas ao ar de uma só vez e registam-se, em cada lançamento, as faces que ficam viradas para cima.

13.1. Qual dos resultados seguintes se obtém mais vezes?

- ☐ A face cara em ambas as moedas.
- ☐ A face cara numa moeda e face escudo na outra moeda.
- ☐ Os dois resultados anteriores obtêm-se aproximadamente o mesmo número de vezes.

13.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

....
....
....
....
....
....
....
....

13.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

14. Lançam-se um grande número de vezes três moedas ao ar de uma só vez e registam-se, em cada lançamento, as faces que ficam viradas para cima.

14.1. Qual dos resultados seguintes se obtém mais vezes?

- ☐ Faces iguais em todas as três moedas.
- ☐ Faces diferentes em duas das três moedas.
- ☐ Os dois resultados anteriores obtêm-se aproximadamente o mesmo número de vezes.

14.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

....
....
....
....
....
....
....
....

14.3. Com que confiança respondeu à pergunta?

Nada confiante	Pouco confiante	Confiante	Muito confiante	Totalmente confiante
☐	☐	☐	☐	☐

QUESTIONÁRIO

Experiência de ensino

Estimado(a) estudante,

O estudo a realizar com este questionário integra-se na minha dissertação de doutoramento e com ele pretende-se identificar as ideias dos alunos acerca do tema de Probabilidades.

As perguntas do questionário são constituídas por várias alternativas, havendo perguntas com quatro alternativas e com três alternativas. Dessas alternativas, apenas uma é correcta. Assim, para responder a cada pergunta do questionário deve assinalar com uma cruz o quadrado correspondente à alternativa correcta (☒). Depois de ter assinalado a sua resposta à pergunta, deve explicar o raciocínio que o levou a escolher essa alternativa. Quanto a esses raciocínios, peço-lhe que se esforce por ser claro e que evite repetir o enunciado das respectivas perguntas.

Compreende que o empenho e a sinceridade com que deve responder a todas as perguntas do questionário é da maior importância para o estudo que estou a realizar, pois só assim se obterão resultados úteis e que merecem confiança. Nesse sentido, é fundamental que leia com atenção os enunciados das perguntas.

Muito obrigado pela colaboração

DADOS PESSOAIS

Nome: ....

Ano: .... *Turma*: .... *Nº*: ....

Idade: .... *Sexo*: ☐ Masculino ☐ Feminino

Notas na disciplina de Matemática: 8º ano, 3º período .... 9º ano, 1º período

QUESTÕES

1. Lança-se 80 vezes uma moeda ao ar e conta-se o número de vezes que sai a face cara e o número de vezes que sai a face escudo.

a) Nos 80 lançamentos da moeda obtém-se <u>pelo menos</u> uma vez a face cara.

☐ De certeza.

☐ É muito provável.

☐ É pouco provável.

☐ É impossível.

Que raciocínio utilizou?..
....
....
....
....

b) Nos 80 lançamentos da moeda obtém-se <u>exactamente</u> 40 vezes a face cara.

☐ De certeza.

☐ É muito provável.

☐ É pouco provável.

☐ É impossível.

Que raciocínio utilizou?..
....
....
....
....

c) Nos 80 lançamentos da moeda obtém-se <u>sempre</u> a face cara.

☐ De certeza.

☐ É muito provável.

☐ É pouco provável.

☐ É impossível.

Que raciocínio utilizou?..
....
....
....
....

2. Observe, em cada alínea, a quantidade de bolas brancas e pretas dos dois sacos. As bolas são todas iguais excepto na cor. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos.

a) Saco I: ○○●● **Saco II:** ○○○●●

De qual dos sacos é mais provável tirar uma bola preta?

☐ Do saco I.

☐ Do saco II.

☐ É igualmente provável tirar uma bola preta de qualquer dos sacos I e II.

Que raciocínio utilizou?..

....

....

....

....

b) Saco I: ○○● **Saco II:** ○○○●●

De qual dos sacos é mais provável tirar uma bola preta?

☐ Do saco I.

☐ Do saco II.

☐ É igualmente provável tirar uma bola preta de qualquer dos sacos I e II.

Que raciocínio utilizou?..

....

....

....

....

c) Saco I: ○●● **Saco II:** ○○●●●●

De qual dos sacos é mais provável tirar uma bola preta?

☐ Do saco I.

☐ Do saco II.

☐ É igualmente provável tirar uma bola preta de qualquer dos sacos I e II.

Que raciocínio utilizou?..

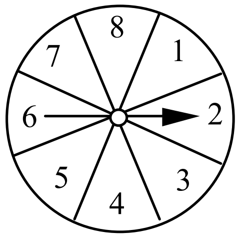
....

....

....

....

3. A roleta da figura seguinte está dividida em oito partes iguais, cada uma representada por um número de 1 a 8. Roda-se a roleta e, depois de parar, regista-se o número assinalado pelo ponteiro.



a) Qual dos acontecimentos é mais provável?

☐ Obter um número maior do que 4.

☐ Obter um número maior do que 4 e menor do que 7.

☐ Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.

Que raciocínio utilizou?..

....

....

....

....

b) Qual dos acontecimentos é mais provável?

☐ Obter um número menor do que 5.

☐ Obter um número menor do que 5 ou ímpar.

☐ Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.

Que raciocínio utilizou?..

....

....

....

....

c) Qual dos acontecimentos é mais provável?

☐ Obter um número não par.

☐ Obter um número menor do que 3 ou não par.

☐ Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.

Que raciocínio utilizou?..

....

....

....

....

4. Observe, em cada alínea, a quantidade de bolas brancas e pretas do saco. As bolas são todas iguais excepto na cor. Sem ver, tiram-se de uma só vez duas bolas do saco.

a) Saco: ○○●●●

Qual dos acontecimentos é mais provável?

□ Obter duas bolas pretas.

□ Obter uma bola branca e uma bola preta.

□ Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.

Que raciocínio utilizou?..

....

....

....

....

b) Saco: ○○○●●●

Qual dos acontecimentos é mais provável?

□ Obter duas bolas brancas.

□ Obter uma bola branca e uma bola preta.

□ Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.

Que raciocínio utilizou?..

....

....

....

....

c) Saco: ○○○○○●●

Qual dos acontecimentos é mais provável?

□ Obter duas bolas brancas.

□ Obter uma bola branca e uma bola preta.

□ Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.

Que raciocínio utilizou?..

....

....

....

....

5. Lançam-se <u>dois dados</u> e somam-se os pontos obtidos nas faces que ficam viradas para cima.

Se fosse jogador, e pretendendo ganhar, em qual dos resultados seguintes <u>apostava</u>?

a) Na soma 3 ou na soma 6?

☐ Na soma 3.

☐ Na soma 6.

☐ As chances de ganhar são iguais com a soma 3 e com a soma 6.

Que raciocínio utilizou?...

....

....

....

....

b) Na soma 4 ou na soma 5?

☐ Na soma 4.

☐ Na soma 5.

☐ As chances de ganhar são iguais com a soma 4 e com a soma 5.

Que raciocínio utilizou?...

....

....

....

....

c) Na soma 3 ou na soma 11?

☐ Na soma 3.

☐ Na soma 11.

☐ As chances de ganhar são iguais com a soma 3 e com a soma 11.

Que raciocínio utilizou?...

....

....

....

....

FICHAS DE AVALIAÇÃO

ESCOLA BÁSICA 2, 3

FICHA DE AVALIAÇÃO <u>A</u> — MATEMÁTICA, 9º ANO

Nome:____
Nº:________ Turma:________ Data:_______ / ______ / ______
Classificação:________________ Encarregado de Educação:___________________

Escreva as respostas e todos os cálculos que efectuar na folha do enunciado, logo a seguir aos enunciados das respectivas perguntas.

1. Lança-se um dado e regista-se o número de pintas da face que fica virada para cima.
Observando que o dado é lançado apenas <u>uma</u> vez, defina:

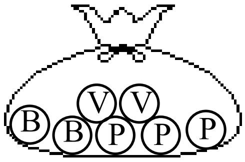
a) um acontecimento <u>possível</u> (mas não certo);

b) um acontecimento <u>impossível</u>;

c) um acontecimento <u>certo</u>.

Resolução

2. Num saco há sete bolas iguais excepto na cor, sendo duas brancas (B), três pretas (P) e duas vermelhas (V), conforme se mostra na figura seguinte. Sem ver, tira-se uma bola do saco.



Qual é a probabilidade de:

a) obter uma bola preta?

b) obter uma bola vermelha ou branca?

c) obter uma bola preta ou azul?

d) não obter uma bola branca?

e) não obter uma bola preta nem vermelha?

Resolução

3. Num saco há apenas bolas brancas, pretas e vermelhas. Não se conhece o número de bolas de cada uma das cores, mas sabe-se que a probabilidade de obter uma bola branca é de 50% e a probabilidade de obter uma bola preta é de 30%.

Tirando sem ver uma bola do saco, calcule a probabilidade de:

a) não obter uma bola branca;

b) obter uma bola branca ou preta;

c) obter uma bola preta ou vermelha.

Resolução

4. Escolheram-se, ao acaso, 50 estudantes de uma escola e perguntou-se a cada um deles a sua bebida preferida. A partir das respostas dadas, obtiveram-se os seguintes dados:

Bebida preferida	Número de estudantes
Sumo	15
Cola	25
Água	6
Leite	4

a) Escolhendo-se novamente um estudante da escola ao acaso, qual é a probabilidade de ele:

a1) preferir sumo?

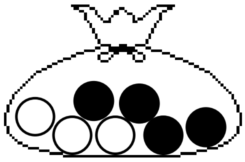
a2) não preferir leite?

a3) preferir água, sabendo-se que a cola não é a sua bebida preferida?

b) Sabendo-se que na escola há 1000 estudantes, quantos deles é de esperar que prefiram cola ou água?

Resolução

5. Num saco há três bolas brancas e quatro bolas pretas, conforme se mostra na figura seguinte. As bolas são todas iguais excepto na cor. Sem ver, tiram-se sucessivamente <u>duas</u> bolas do saco.



a) Supondo que a 1ª bola extraída <u>é colocada</u> de novo no saco antes de se extrair a 2ª, determine a probabilidade de obter uma bola branca e uma bola preta.

b) Supondo que a 1ª bola extraída <u>não é colocada</u> de novo no saco antes de se extrair a 2ª, determine a probabilidade de:

b1) a 2ª bola ser preta, se a 1ª bola que se tirou é branca;

b2) obter duas bolas brancas;

b3) obter uma bola preta e uma bola branca.

Resolução

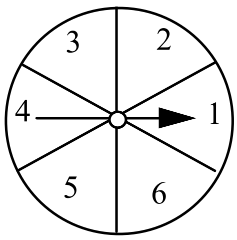
ESCOLA BÁSICA 2, 3

FICHA DE AVALIAÇÃO B — MATEMÁTICA, 9º ANO

Nome:________________________________		
Nº:________	Turma:________	Data:_______ / ______ / ______
Classificação:________________	Encarregado de Educação:___________________	

Escreva as respostas e todos os cálculos que efectuar na folha do enunciado, logo a seguir aos enunciados das respectivas perguntas.

1. A roleta da figura seguinte está dividida em seis partes iguais, cada uma representada por um número de 1 a 6. Roda-se a roleta e, depois de parar, regista-se o número assinalado pelo ponteiro.



Observando a roleta e considerando que roda apenas uma vez, defina:

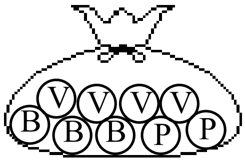
a) um acontecimento possível (mas não certo);

b) um acontecimento impossível;

c) um acontecimento certo.

Resolução

2. Num saco há nove bolas iguais excepto na cor, sendo três brancas (B), duas pretas (P) e quatro vermelhas (V), conforme se mostra na figura seguinte. Sem ver, tira-se uma bola do saco.



Qual é a probabilidade de:

a) obter uma bola vermelha?

b) obter uma bola preta ou branca?

c) obter uma bola vermelha ou amarela?

d) não obter uma bola branca?

e) não obter uma bola vermelha nem preta?

Resolução

3. Num saco há apenas bolas brancas, azuis e vermelhas. Não se conhece o número de bolas de cada uma das cores, mas sabe-se que a probabilidade de obter uma bola azul é de 10% e a probabilidade de obter uma bola vermelha é de 60%.

Tirando sem ver uma bola do saco, calcule a probabilidade de:

a) não obter uma bola vermelha;

b) obter uma bola azul ou vermelha;

c) obter uma bola branca ou vermelha.

Resolução

4. Escolheram-se, ao acaso, 80 estudantes de uma escola e perguntou-se a cada um deles o seu Clube de Futebol preferido. A partir das respostas dadas, obtiveram-se os seguintes dados:

Clube preferido	Número de estudantes
Benfica	30
Porto	25
Sporting	15
Braga	10

a) Escolhendo-se novamente um estudante da escola ao acaso, qual é a probabilidade de:

a1) o Braga ser o seu Clube preferido?

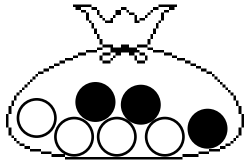
a2) o Benfica não ser o seu Clube preferido?

a3) o Porto ser o seu Clube preferido, sabendo-se que o Benfica não é o seu clube preferido?

b) Sabendo-se que na escola há 1600 estudantes, quantos deles é de esperar que prefiram o Benfica ou o Sporting?

Resolução

5. Num saco há quatro bolas brancas e três bolas pretas, conforme se mostra na figura seguinte. As bolas são todas iguais excepto na cor. Sem ver, tiram-se sucessivamente duas bolas do saco.



a) Supondo que a 1ª bola extraída é colocada de novo no saco antes de se extrair a 2ª, determine a probabilidade de obter uma bola branca e uma bola preta.

b) Supondo que a 1ª bola extraída não é colocada de novo no saco antes de se extrair a 2ª, determine a probabilidade de:

b1) a 2ª bola ser preta, se a 1ª bola que se tirou é branca;

b2) obter duas bolas brancas;

b3) obter uma bola preta e uma bola branca.

Resolução

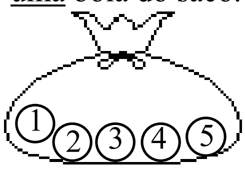
ESCOLA BÁSICA 2, 3

FICHA DE AVALIAÇÃO C — MATEMÁTICA, 9º ANO

Nome:____
Nº:________ Turma:________ Data:_______ / ______ / ______
Classificação:________________ Encarregado de Educação:___________________

Escreva as respostas e todos os cálculos que efectuar na folha do enunciado, logo a seguir aos enunciados das respectivas perguntas.

1. Num saco há cinco bolas todas iguais numeradas de 1 a 5, conforme se mostra na figura seguinte. Sem ver, tira-se uma bola do saco.



Observando o saco e considerando que se tira apenas uma bola, defina:

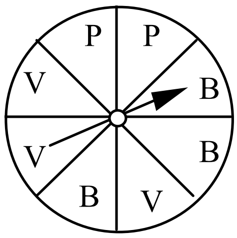
a) um acontecimento possível (mas não certo);

b) um acontecimento impossível;

c) um acontecimento certo.

Resolução

2. Uma roleta está dividida em oito partes iguais, sendo três brancas (B), duas pretas (P) e três vermelhas (V), como se mostra na figura seguinte. Roda-se a roleta e regista-se a cor assinalada pelo ponteiro.



Qual é a probabilidade de:

a) sair a cor branca?

b) sair a cor vermelha ou preta?

c) sair a cor branca ou amarela?

d) não sair a cor preta?

e) não sair a cor branca nem vermelha?

Resolução

3. Num saco há apenas bolas pretas, azuis e verdes. Não se conhece o número de bolas de cada uma das cores, mas sabe-se que a probabilidade de obter uma bola preta é de 20% e a probabilidade de obter uma bola verde é de 70%.

Tirando sem ver <u>uma</u> bola do saco, calcule a probabilidade de:

a) não obter uma bola preta;

b) obter uma bola preta ou verde;

c) obter uma bola verde ou azul.

Resolução

4. Escolheram-se, ao acaso, 60 estudantes de uma escola e perguntou-se a cada um deles o seu número de irmãos. A partir das respostas dadas, obtiveram-se os seguintes dados:

Número de irmãos	Número de estudantes
0 irmãos	8
1 irmão	25
2 irmãos	15
3 ou mais irmãos	12

a) Escolhendo-se novamente um estudante da escola ao acaso, qual é a probabilidade de ele:

a1) ter 2 irmãos?

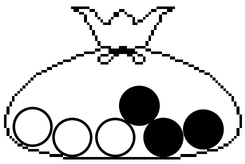
a2) não ter mais que 2 irmãos?

a3) ter 1 irmão, sabendo-se que ele não é filho único?

b) Sabendo-se que na escola há 1200 estudantes, quantos deles é de esperar que tenham 2 ou mais irmãos?

Resolução

5. Num saco há três bolas brancas e três bolas pretas, conforme se mostra na figura seguinte. As bolas são todas iguais excepto na cor. Sem ver, tiram-se sucessivamente duas bolas do saco.



a) Supondo que a 1ª bola extraída é colocada de novo no saco antes de se extrair a 2ª, determine a probabilidade de obter uma bola branca e uma bola preta.

b) Supondo que a 1ª bola extraída não é colocada de novo no saco antes de se extrair a 2ª, determine a probabilidade de:

b1) a 2ª bola ser branca, se a 1ª bola que se tirou é preta;

b2) obter duas bolas brancas;

b3) obter uma bola preta e uma bola branca.

Resolução

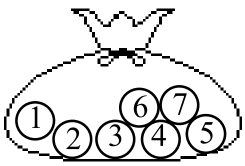
ESCOLA BÁSICA 2, 3

FICHA DE AVALIAÇÃO <u>D</u> — MATEMÁTICA, 9º ANO

Nome:______________________________		
Nº:________	Turma:________	Data:_______ / ______ / ______
Classificação:________________	Encarregado de Educação:___________________	

Escreva as respostas e todos os cálculos que efectuar na folha do enunciado, logo a seguir aos enunciados das respectivas perguntas.

1. Num saco há sete bolas todas iguais numeradas de 1 a 7, conforme se mostra na figura seguinte. Sem ver, tira-se <u>uma</u> bola do saco.



Observando o saco e considerando que se tira apenas <u>uma</u> bola, defina:

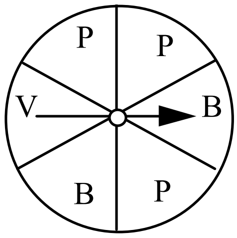
a) um acontecimento <u>possível</u> (mas não certo);

b) um acontecimento <u>impossível</u>;

c) um acontecimento <u>certo</u>.

Resolução

2. Uma roleta está dividida em seis partes iguais, sendo duas brancas (B), três pretas (P) e uma vermelha (V), como se mostra na figura seguinte. Roda-se a roleta e regista-se a cor assinalada pelo ponteiro.



Qual é a probabilidade de:

a) sair a cor vermelha?

b) sair a cor preta ou branca?

c) sair a cor vermelha ou azul?

d) não sair a cor branca?

e) não sair a cor preta nem vermelha?

Resolução

3. Num saco há apenas bolas vermelhas, azuis e verdes. Não se conhece o número de bolas de cada uma das cores, mas sabe-se que a probabilidade de obter uma bola azul é de 40% e a probabilidade de obter uma bola verde é de 10%.

Tirando sem ver uma bola do saco, calcule a probabilidade de:

a) não obter uma bola verde;

b) obter uma bola azul ou verde;

c) obter uma bola verde ou vermelha.

Resolução

4. Escolheram-se, ao acaso, 90 estudantes do 9º ano de uma escola e perguntou-se a cada um deles a nota obtida em Matemática. A partir das respostas dadas, obtiveram-se os seguintes dados:

Nota obtida	Número de estudantes
Nível 1	2
Nível 2	23
Nível 3	35
Nível 4	20
Nível 5	10

a) Escolhendo-se novamente um estudante do 9º ano da escola ao acaso, qual é a probabilidade de ele em Matemática:

a1) ter nível 3?

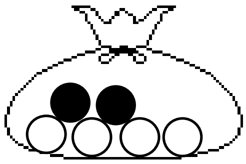
a2) não ter nível 2?

a3) ter nível 4, sabendo-se que ele tem positiva?

b) Sabendo-se que na escola há 450 estudantes do 9º ano, quantos deles é de esperar que tenham negativa em Matemática?

Resolução

5. Num saco há quatro bolas brancas e duas bolas pretas, conforme se mostra na figura seguinte. As bolas são todas iguais excepto na cor. Sem ver, tiram-se sucessivamente duas bolas do saco.



a) Supondo que a 1ª bola extraída é colocada de novo no saco antes de se extrair a 2ª, determine a probabilidade de obter uma bola branca e uma bola preta.

b) Supondo que a 1ª bola extraída não é colocada de novo no saco antes de se extrair a 2ª, determine a probabilidade de:

b1) a 2ª bola ser branca, se a 1ª bola que se tirou é preta;

b2) obter duas bolas brancas;

b3) obter uma bola preta e uma bola branca.

Resolução

A N E X O I I

VALIDAÇÃO DOS QUESTIONÁRIOS

Conceito clássico
Conceito frequencista
Experiência de ensino

FICHA DE AVALIAÇÃO DOS QUESTIONÁRIOS

Conceito clássico
Conceito frequencista

Exmo(a). Senhor(a) Professor(a),

Venho solicitar a sua colaboração na realização de um trabalho de investigação sobre “As Intuições Probabilísticas e o Ensino-Aprendizagem de Probabilidades”, que constitui o tema da minha dissertação de doutoramento.

Mais especificamente, a solicitação que lhe venho fazer prende-se com a validação de um questionário, com o qual se pretende atingir o objectivo seguinte: – Identificar e caracterizar intuições probabilísticas de alunos sem experiência de ensino e com experiência de ensino em probabilidades.

O questionário, constituído por 14 questões sobre vários conceitos probabilísticos, será passado a alunos do 8º ano de escolaridade e do 11º ano de escolaridade. Relativamente a cada uma dessas perguntas do questionário procurei explicitar o conceito(s) probabilístico(s) subjacente(s) à pergunta, pelo que a sua avaliação deve considerar as três dimensões seguintes: (1) a correcção da inserção da questão no(s) conceito(s) probabilístico(s), (2) a utilização de uma linguagem acessível ao nível de compreensão dos alunos e (3) a adequação da questão ao objectivo do estudo. Para esse efeito, segue junto o questionário e um ficha de avaliação que o Senhor(a) Professor(a) poderá usar para relatar a sua avaliação, a qual assume duas formas: (i) classificar cada uma das três dimensões consideradas em cada questão numa das categorias: “estou de acordo” e “não estou de acordo” e (ii) a escrita de comentários acerca de cada questão. Estes comentários são particularmente importantes em relação às questões em que classificou alguma das dimensões em “não estou de acordo”.

Aproveito, igualmente, esta oportunidade para lhe exprimir os meus maiores agradecimentos pela sua inestimável colaboração.

Com os meus melhores cumprimentos,

FICHA DE AVALIAÇÃO

Questões	**Conceito(s) em que se inserem as questões**	**Inserção das questões no(s) conceito(s)**		**Linguagem acessível aos alunos**		**Adequação das questões ao objectivo**		**Comentário**
		Estou de acordo	Não estou de acordo	Estou de acordo	Não estou de acordo	Estou de acordo	Não estou de acordo	
1	*Acontecimento certo, possível e impossível*							
2	As questões 1 e 2 referem-se a acontecimentos em experiências simples e a questão 3 refere-se a acontecimentos em experiências compostas.							
3								
4	*Probabilidade em experiências simples*							
5	As questões de 4 a 9 (inclusive) referem-se à probabilidade de acontecimentos em experiências simples.							
6								

Questões	Conceito(s) em que se inserem as questões	Inserção das questões no(s) conceito(s)		Linguagem acessível aos alunos		Adequação das questões ao objectivo		Comentário
		Estou de acordo	Não estou de acordo	Estou de acordo	Não estou de acordo	Estou de acordo	Não estou de acordo	
7	(Continuação da página anterior.) *Probabilidade em experiências simples*							
8								
9								
10	*Probabilidade em experiências compostas* As questões de 10 a 14 (inclusive) referem-se à probabilidade de acontecimentos em experiências compostas.							
11								
12								

Questões	**Conceito(s) em que se inserem as questões**	**Inserção das questões no(s) conceito(s)**		**Linguagem acessível aos alunos**		**Adequação das questões ao objectivo**		**Comentário**
		Estou de acordo	Não estou de acordo	Estou de acordo	Não estou de acordo	Estou de acordo	Não estou de acordo	
13	(Continuação da página anterior.) *Probabilidade em experiências compostas*							
14								

FICHA DE AVALIAÇÃO DO QUESTIONÁRIO

Experiência de ensino

Exmo(a). Senhor(a) Professor(a),

Venho solicitar a sua colaboração na realização de um trabalho de investigação sobre "As Intuições Probabilísticas e o Ensino-Aprendizagem de Probabilidades", que constitui o tema da minha dissertação de doutoramento.

Mais especificamente, a solicitação que lhe venho fazer prende-se com a validação de um questionário, com o qual se pretende atingir o objectivo seguinte: – Comparar o impacto de uma experiência de ensino baseada nas intuições probabilísticas com uma experiência de ensino tradicional, em relação ao tema 'Estatística e probabilidades' do 9º ano de escolaridade.

O questionário, constituído por cinco questões, cada uma com três alíneas, sobre vários conceitos probabilísticos, será passado a alunos do 9º ano de escolaridade antes e depois do ensino do tema 'Estatística e probabilidades'. Relativamente a cada uma dessas perguntas do questionário procurei explicitar o conceito(s) probabilístico(s) subjacente(s) à pergunta, pelo que a sua avaliação deve considerar as três dimensões seguintes: (1) a correcção da inserção da questão no(s) conceito(s) probabilístico(s), (2) a utilização de uma linguagem acessível ao nível de compreensão dos alunos e (3) a adequação da questão ao objectivo do estudo. Para esse efeito, segue junto o questionário e um ficha de avaliação que o Senhor(a) Professor(a) poderá usar para relatar a sua avaliação, a qual assume duas formas: (i) classificar cada uma das três dimensões consideradas em cada questão numa das categorias: "estou de acordo" e "não estou de acordo" e (ii) a escrita de comentários acerca de cada questão. Estes comentários são particularmente importantes em relação às questões em que classificou alguma das dimensões em "não estou de acordo".

Aproveito, igualmente, esta oportunidade para lhe exprimir os meus maiores agradecimentos pela sua inestimável colaboração.

Com os meus melhores cumprimentos,

FICHA DE AVALIAÇÃO

Questões	**Conceito(s) em que se inserem as questões**	**Inserção das questões no(s) conceito(s)**		**Linguagem acessível aos alunos**		**Adequação das questões ao objectivo**		**Comentário**
		Estou de acordo	Não estou de acordo	Estou de acordo	Não estou de acordo	Estou de acordo	Não estou de acordo	
1.a)	*Acontecimentos quase certos e quase impossíveis*							
1.b)	As três alíneas da questão 1 referem-se à distinção entre acontecimentos certos e quase certos e entre acontecimentos impossíveis e quase impossíveis.							
1.c)								
2.a)	*Probabilidade em experiências simples*							
2.b)	As três alíneas da questão 2 referem-se à probabilidade de acontecimentos em experiências simples no contexto de urnas.							
2.c)								

Questões	Conceito(s) em que se inserem as questões	Inserção das questões no(s) conceito(s)		Linguagem acessível aos alunos		Adequação das questões ao objectivo		Comentário
		Estou de acordo	Não estou de acordo	Estou de acordo	Não estou de acordo	Estou de acordo	Não estou de acordo	
3.a)	*Probabilidade em experiências simples* As três alíneas da questão3 referem-se à probabilidade de acontecimentos em experiências simples no contexto de roletas e envolvem aspectos lógicos.							
3.b)								
3.c)								
4.a)	*Probabilidade em experiências compostas* As três alíneas da questão 4 referem-se à probabilidade de acontecimentos em experiências compostas no contexto de urnas.							
4.b)								
4.c)								

Questões	Conceito(s) em que se inserem as questões	Inserção das questões no(s) conceito(s)		Linguagem acessível aos alunos		Adequação das questões ao objectivo		Comentário
		Estou de acordo	Não estou de acordo	Estou de acordo	Não estou de acordo	Estou de acordo	Não estou de acordo	
5.a)	*Probabilidade em experiências compostas* As três alíneas da questão5 referem-se à probabilidade de acontecimentos em experiências compostas no contexto de dados.							
5.b)								
5.c)								

A N E X O I I I

PLANIFICAÇÃO DO TEMA

Probabilidades e Estatística – 9º Ano de Escolaridade

INTRODUÇÃO

O conceito de probabilidade é abordado em três perspectivas diferentes: a perspectiva subjectivista, a perspectiva frequencista e a perspectiva clássica.

Na perspectiva subjectivista incluem-se as avaliações e julgamentos probabilísticos baseados nas convicções e motivações dos alunos. Fischbein (1990) chama ao grau de aceitação ou rejeição subjectiva de conceitos ou afirmações matemáticas o aspecto intuitivo do raciocínio matemático, que contrasta com o aspecto formal, que se exprime na estrutura lógico-dedutiva da matemática, e com o aspecto algorítmico ou procedimental, que é representado por procedimentos de transformação e de resolução que seguem certas regras.

Na perspectiva frequencista, realiza-se várias vezes a experiência aleatória e toma-se para valor aproximado da probabilidade o valor da frequência relativa do acontecimento em estudo. Trata-se, portanto, de uma definição de probabilidade *a posteriori*.

Finalmente, na perspectiva clássica, toma-se para valor da probabilidade a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Nesta perspectiva de probabilidade, a observação da regularidade e da simetria dos objectos aleatórios levam a concluir que não há razões para não admitir que os vários resultados possíveis não são equiprováveis. Trata-se, neste caso, de uma definição de probabilidade *a priori*.

A consideração simultânea das perspectivas frequencista e clássica de probabilidade, conduz ao estabelecimento de relações entre a estatística e as probabilidades. Este aspecto é da maior importância se pretendermos abordar o estudo das probabilidades numa perspectiva de aplicações e de exploração de situações do dia-a-dia (Freudenthal, 1973). A este propósito deve ter-se presente que a definição clássica de probabilidade não permite resolver muitos dos problemas que envolvem incerteza, mais especificamente aqueles em que há razões para não admitir a equiprobabilidade dos diferentes resultados. Assim, a questão não está em determinar se é mais apropriado explorar a vertente estatística, com base na frequência relativa, ou a vertente clássica, a partir do recurso a jogos ideais de sorte-azar. O que é realmente importante é a integração dos aspectos teóricos e empíricos do conceito de probabilidade (Steinbring & v. Harten, 1983), ou seja, o estudo da estocástica (Shaughnessy, 1992).

Quanto à perspectiva subjectivista, ela deve estar presente ao longo de todo o tema. Nesta vertente do conceito de probabilidade é imprescindível que o aluno tenha a oportunidade de exprimir as suas ideias relativamente aos diversos conteúdos tratados (Konold, 1991).

Em termos de conteúdo, consideram-se três grandes temas: ‘Termos e conceitos probabilísticos’, ‘Probabilidades em experiências simples’ e ‘Probabilidades em experiências compostas. No estabelecimento de termos e conceitos probabilísticos, para além dos objectos aleatórios comuns – como dados e urnas, exploram-se situações do dia-a-dia com o propósito de clarificar e aprofundar o significado dos respectivos termos e conceitos; a definição de probabilidade em experiências simples é introduzida primeiro a partir da perspectiva clássica, seguindo-se o seu estudo na perspectiva frequencista; e, finalmente, no cálculo de probabilidades em experiências compostas parte-se de uma aproximação frequencista no sentido de estabelecer a probabilidade teórica numa perspectiva clássica.

No caso das probabilidades em experiências simples, a abordagem clássica justifica-se na medida em que os resultados do questionário, construído numa perspectiva clássica, revelaram que os alunos possuem intuições acerca desse conceito, embora frequentemente limitadas na sua aplicação ou mesmo erradas. Além disso, neste subtema, os alunos seleccionaram a resposta correcta com percentagens idênticas no questionário-conceito clássico e no questionário-conceito frequencista.

Já no caso das probabilidades em experiências compostas, a situação é diversa. Neste caso, muitos alunos parecem não possuir quaisquer intuições acerca das respectivas probabilidades e, em relação às respostas correctas neste subtema, verificou-se que os alunos escolheram-nas mais frequentemente no questionário-conceito frequencista do que no questionário-conceito clássico. Neste subtema, que se revelou muito difícil, recorreu-se à exploração de sistemas de tarefas (Steinbring, 1991).

Em termos de ensino, a identificação e a exploração das intuições dos alunos requer que as actividades de ensino cumpram certos requisitos. Em primeiro lugar, estas actividades devem contemplar as três perspectivas do conceito de probabilidade, já antes referidas. Em segundo lugar, a identificação e posterior exploração das intuições probabilísticas dos alunos implica que comecemos por explorar as actividades com essa finalidade em primeiro lugar. Finalmente, as actividades de ensino devem permitir a adopção de metodologias de ensino activas e centradas no aluno.

CONTEÚDOS

1. Termos e conceitos probabilísticos.
    1.1. As probabilidades e seus termos.
    1.2. Valor da probabilidade de um acontecimento.
    1.3. Actividades sobre o subtema
2. Probabilidades em experiências simples.
    2.1. Avaliação de probabilidades.
    2.2. Conceito clássico de probabilidade: probabilidades *a priori.*
    2.3. Conceito frequencista de probabilidade: probabilidades *a posteriori.*
    2.4. Actividades sobre o subtema.
3. Probabilidades em experiências compostas.
    3.1. Avaliação e cálculo de probabilidades.
    3.2. Cálculo de probabilidades.
    3.3. Actividades sobre o subtema.

OBJECTIVOS

Usar termos e conceitos probabilísticos.
Classificar acontecimentos probabilísticos.
Interpretar o significado dos conectivos *e*, *ou* e *não*.
Determinar probabilidades em experiências simples.
Determinar probabilidades em experiências compostas.
Aplicar probabilidades à resolução de problemas.
Encorajar os alunos a exprimirem as suas ideias.
Explorar estratégias de resolução utilizadas pelos alunos.

METODOLOGIAS

Confronto das ideias dos alunos.
Discussão em pares e no grupo turma.
Exploração do professor apoiada no questionamento constante dos alunos.
Concretização de situações probabilísticas recorrendo a objectos aleatórios.
Realização de actividades fora da sala de aula.
Trabalho individual e trabalho em pares.

AVALIAÇÃO

Observação do trabalho desenvolvido na realização das actividades.
Correcção de actividades realizadas fora da sala de aula.
Questionário-experiência de ensino.
Ficha de avaliação sumativa.

ACTIVIDADES

Apresentam-se, seguidamente, as actividades que foram exploradas no ensino do tema. As actividades estão agrupadas segundo os diferentes conteúdos e, para cada uma delas, apresentam-se os objectivos e indicam-se sugestões metodológicas para a sua implementação na sala de aula.

1. TERMOS E CONCEITOS PROBABILÍSTICOS

1.1. As probabilidades e seus termos

Actividade 1 – Significado e utilidade das probabilidades

Dê exemplos de situações em que se utilizam as probabilidades.

O que caracteriza essas situações?

Objectivos

Incentivar os alunos a exprimirem as suas ideias.

Discutir as ideias dos alunos.

Reconhecer o significado e a utilidade das probabilidades.

Sugestões metodológicas

Os alunos trabalham individualmente. Depois dos alunos terem pensado durante algum tempo, o professor solicita aos alunos que comuniquem as suas ideias à turma. Finalmente, após os alunos terem avaliado as ideias, o professor organiza a síntese dos exemplos surgidos na turma e regista-os no quadro, enquanto os alunos os registam nos cadernos.

Com esta actividade pretende-se que os alunos reconheçam o objecto do estudo das probabilidades e apresentem exemplos de algumas das suas aplicações. Nesta fase, o que é mais importante é que os alunos reflictam, verbalizem as suas ideias e, finalmente, discutam-nas.

Actividade 2 – Texto sobre as probabilidades e seus termos

Leia atentamente o texto seguinte e pense nas respostas às perguntas que vão sendo formuladas.

Que situações se estudam em probabilidades? O que é um acontecimento certo?

Na vida do dia-a-dia é frequente falar-se de acontecimentos em termos das suas chances de ocorrerem. Falamos das chances da nossa equipa preferida ganhar o próximo jogo, das chances de tirar um cinco em Matemática ou das chances de ser eleito Delegado de Turma. Neste sentido, a palavra <u>probabilidade</u> é usada algumas vezes em lugar da palavra <u>chance</u>. Então, podemos falar da probabilidade de um atleta vencer uma corrida ou da probabilidade do próximo bebé a nascer num hospital ser rapaz.

Os termos <u>chance</u> e <u>probabilidade</u> são usualmente aplicados naquelas situações em que não podemos determinar antecipadamente o resultado. Nestas situações não estamos certos do que acontecerá. Não sabemos se a nossa equipa preferida ganhará ou perderá, portanto falamos das chances da equipa ganhar. Porque não estamos certos de tirar um cinco em Matemática, falamos das possibilidades de obter um cinco nessa disciplina.

Há, no entanto, situações em que antecipadamente conhecemos os resultados. Assim, temos a certeza que deixando cair uma pedra ela cai ao solo e que em Agosto não terei escola. Dizemos, nestas situações, que estamos <u>certos</u> acerca destes acontecimentos.

Todos temos ouvido afirmações como: “Tenho a certeza que passarei de ano” ou “Tenho a certeza que sei o caminho para minha casa”.

Designando por fenómenos deterministas aqueles em que podemos prever antecipadamente o resultado e por fenómenos aleatórios aqueles em que não podemos prever antecipadamente o resultado, conclui-se que às probabilidades interessa o estudo dos fenómenos aleatórios, isto é, aqueles que envolvem incerteza.

O que é um acontecimento provável? O que é um acontecimento improvável?

Outras vezes não estamos certos acerca do resultado a obter, mas, todavia, pensamos que temos boas chances em obter esse resultado. Dizemos que um tal resultado é provável ou muito provável. Se estamos confiantes de que sabemos as respostas às perguntas de um teste, então podemos dizer que é provável que tiremos uma boa nota no teste. Se estamos razoavelmente seguros de que iremos ao cinema no próximo Sábado, então podemos dizer que é provável irmos ao cinema no próximo Sábado. Contudo, se pensamos que as chances de um acontecimento ocorrer são baixas, podemos dizer que um tal acontecimento é improvável. Se não estudar para o teste de História, então é improvável que tire uma boa nota no teste. Assim, o termo provável refere-se aos acontecimentos que têm uma grande probabilidade de ocorrerem e o termo improvável refere-se aos acontecimentos que têm uma pequena probabilidade de ocorrerem.

O que é um acontecimento impossível?

Há ainda situações em que antecipadamente sabemos de certeza que um resultado não ocorrerá. Nestas situações estamos certos do que não acontecerá, e dizemos que o resultado é impossível. Assim, por exemplo, é impossível que uma pessoa salte quatro metros em altura ou que vá de avião de Lisboa a Tóquio em apenas uma hora.

Em que situações se aplicam as probabilidades?

O conceito de chance, ou probabilidade, é largamente usado nas ciências naturais e sociais, pois são poucos os resultados nestas áreas que são conhecidos antecipadamente. Muitos acontecimentos são relatados em termos de chances – por exemplo, as chances de chover amanhã, as chances de não ter qualquer acidente no percurso de casa para a escola, as chances de viver para além dos 70 anos, as chances de adquirir uma doença (ou de curar-se de uma doença) e as chances de um candidato vencer uma eleição.

Talvez o seu uso mais importante seja ajudar-nos a tomar decisões ao longo da vida. Se um estudante sabe que tem poucas chances de passar numa disciplina, então ele pode decidir estudar mais. Se um remédio tem poucas chances de curar uma doença, então é provável que não usemos esse remédio para tratar a doença. Se é provável chover, então levamos o guarda-chuva e a gabardina, mas se é improvável chover, não nos preocupamos em levar tais objectos. Na indústria e no comércio tomam-se decisões importantes usando raciocínios semelhantes. Por exemplo, as companhias de seguros estão interessadas em conhecer a probabilidade de ocorrência de acidentes de automóvel entre pessoas de certos grupos etários, e as empresas estão interessadas em saber a probabilidade de um novo produto dar lucro ou a probabilidade de produzir um novo produto sem defeitos.

Síntese teórica

• Em probabilidades estudam-se fenómenos aleatórios.
• Um acontecimento é certo quando há a certeza de que ele ocorrerá.
• Um acontecimento é provável quando tem uma grande probabilidade de ocorrer.
• Um acontecimento é improvável quando tem uma pequena probabilidade de ocorrer.
• Um acontecimento é impossível quando há a certeza de que ele não ocorrerá.

Objectivos
Compreender o objecto e a utilidade das probabilidades.
Conhecer termos probabilísticos.
Definir termos probabilísticos.

Sugestões metodológicas
Leitura individual do texto. Depois dos alunos terem lido o texto e de terem pensado nas respostas às perguntas formuladas, o professor volta a colocar as questões oralmente e usa as respostas para escrever a síntese teórica, que deve ser também registada pelos alunos nos seus cadernos.

Actividade 3 – Acontecimentos pessoais

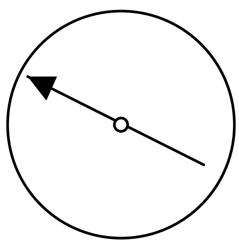
Pense em acontecimentos que podem vir a ocorrer na sua vida, e escreva um acontecimento certo, um acontecimento provável, um acontecimento improvável e um acontecimento impossível.

Objectivos
Formular acontecimentos probabilísticos.
Aplicar termos probabilísticos.

Sugestões metodológicas
Os alunos trabalham individualmente. A título de exemplo, o professor questiona alguns alunos para que os acontecimentos por eles identificados sejam conhecidos e discutidos pelos alunos da turma. Ao mesmo tempo, o professor e os alunos vão registando esses acontecimentos.

Actividade 4 – Roleta

Uma roleta está dividida em duas partes, uma de cor branca e outra de cor preta, como se mostra na figura seguinte. Roda-se a roleta e regista-se a cor assinalada pelo ponteiro.



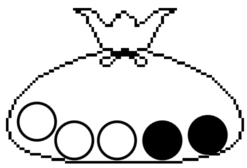
a) É tão provável obter a cor preta como a cor branca? Porquê?
b) Rodamos 100 vezes a roleta. É muito provável que se obtenha mais vezes a cor branca do que a cor preta? Porquê?
c) Rodamos 100 vezes a roleta. Responda a cada uma das perguntas seguintes com Sim ou Não. Explique a sua resposta.
c1) Obtém-se de certeza pelo menos uma vez a cor preta?
c2) É muito provável que nunca se obtenha a cor preta?
c3) É possível que nunca se obtenha a cor preta?
c4) É impossível obter sempre a cor preta?
c5) É pouco provável que se obtenha exactamente 25 vezes a cor preta?

Objectivos
Compreender termos probabilísticos.
Classificar acontecimentos probabilísticos.

Sugestões metodológicas
Os alunos trabalham em pares. O professor lidera a discussão sobre as respostas dadas.

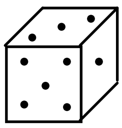
Actividade 5 – Acontecimento certo, possível e impossível

Extracção de uma bola de um saco
Um saco contém três bolas brancas e duas bolas pretas. Sem ver, tira-se uma bola do saco.



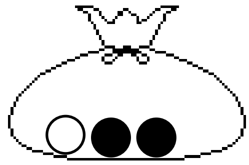
É certo, possível (mas não certo) ou impossível obter?
a) Uma bola preta.
b) Uma bola branca.
c) Uma bola azul.
d) Uma bola não branca.
e) Uma bola não azul.
f) Uma bola preta ou branca.
g) Uma bola branca ou azul.
h) Uma bola preta ou não preta.

Lançamento de um dado
Lança-se um dado e conta-se o número de pintas da face que fica virada para cima.



É certo, possível (mas não certo) ou impossível obter?
a) O número 3.
b) Um número ímpar.
c) Um número menor do que 8.
d) Um número maior do que dois.
e) Um número menor do que 1.
f) Um número par ou ímpar.
g) Um número compreendido entre 2 e 6, exclusive.

Extracção de duas bolas de um saco
Um saco contém uma bola branca e duas bolas pretas. Sem ver, tiram-se de uma só vez duas bolas do saco.



É certo, possível (mas não certo) ou impossível obter?
a) Uma bola branca e uma bola preta.
b) Duas bolas brancas.
c) Duas bolas pretas.
d) Uma bola branca e outra não branca.
e) Uma das bolas branca ou preta.
f) Pelo menos uma bola preta.
g) Uma bola branca e uma não preta.

O que é um acontecimento certo?
O que é um acontecimento possível (mas não certo)?
O que é um acontecimento impossível?

Síntese teórica

• Um acontecimento certo ocorre sempre.
• Um acontecimento possível (mas não certo) ocorre algumas vezes mas não sempre.
• Um acontecimento impossível nunca ocorre.

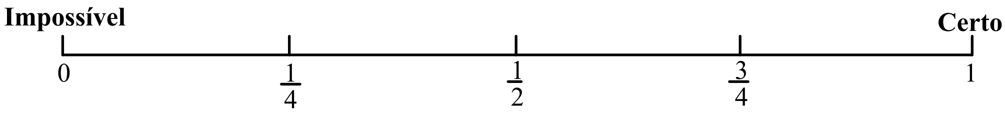
Objectivos
Classificar acontecimentos probabilísticos.
Aplicar termos probabilísticos.

Sugestões metodológicas
Os alunos trabalham em pares. Antes dos alunos responderem às questões, o professor ilustra cada uma das três situações recorrendo a um saco com as respectivas bolas e a um dado. O professor lidera a discussão sobre as respostas dadas. Por fim, o professor coloca as questões sobre a classificação dos acontecimentos e estabelecem-se oralmente as respectivas definições.
Caso surjam dificuldades em classificar alguns acontecimentos, o professor concretizará as respectivas situações recorrendo ao saco ou ao dado.

1.2. Valor da probabilidade de um acontecimento

Actividade 1 – Probabilidade de acontecimentos da vida do dia-a-dia

Considerando que na escala da figura o **0** representa impossibilidade e o **1** representa certeza, situe cada um dos acontecimentos seguintes num dos quatro intervalos considerados.



a) Durante o próximo período lectivo faltarei à escola pelo menos uma vez.
b) Vou tirar um excelente no próximo teste de Matemática.
c) Nesta semana vou comer flocos ao pequeno-almoço pelo menos uma vez.
d) Durante o próximo Inverno vou ter uma gripe.
e) Em Agosto vai chover muitas vezes em Braga.
f) Uma pessoa pode viver sem beber água durante dois meses.
g) O próximo bebé a nascer no hospital da minha cidade será uma menina.
h) Na próxima eleição para Presidente da República será eleita uma mulher.
i) Este ano o Sporting vai ganhar o Campeonato Nacional da I Divisão.

Síntese teórica

- A probabilidade do acontecimento certo é 1.
- A probabilidade do acontecimento impossível é 0.
- A probabilidade de qualquer acontecimento é sempre maior ou igual a 0 e menor ou igual a 1, ou seja, é um número do intervalo [0, 1].

Objectivos

Atribuir o valor 0 à probabilidade de um acontecimento impossível.
Atribuir o valor 1 à probabilidade de um acontecimento certo.
Estimar o valor da probabilidade de um acontecimento no intervalo [0, 1].

Sugestões metodológicas

Os alunos trabalham individualmente. O professor lidera a discussão sobre as respostas dadas. Finalmente, o professor estabelece a síntese teórica. Nesta actividade deve observar-se que as probabilidades podem ser influenciadas por factores experienciais e motivacionais, podendo, em consequência, assumir um carácter subjectivo.

1.3. Actividades sobre o subtema

1. Classifique cada um dos seguintes acontecimentos em certo, provável, improvável ou impossível.

a) Em Braga, amanhã só vão nascer bebés do sexo masculino.

b) No próximo fim-de-semana haverá pelo menos 100 acidentes nas estradas portuguesas.

c) Escolhendo ao acaso um português, verifica-se que ele tem menos de um metro e 90 centímetros de altura.

d) Numa corrida de bicicleta, em que apenas participam portugueses, o vencedor será português.

e) No ano 2020, o Jogos Olímpicos vão realizar-se em Braga.

f) Há pelo um português que viverá até ao ano 2200.

2. Lança-se 60 vezes um dado e conta-se o número de pintas da face que fica virada para cima.

a) É muito provável sair exactamente 10 vezes a face um?

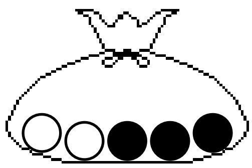
b) É improvável sair pelo menos 5 vezes a face dois?

c) É certo sair pelo menos uma vez a face seis?

d) É provável sair aproximadamente o mesmo número de vezes a face quatro e a face três?

e) É impossível sair sempre a face cinco?

3. Um saco contém duas bolas brancas e três bolas pretas. Sem ver, tira-se uma bola do saco.



a) É mais provável tirar uma bola branca ou uma bola preta? Porquê?

b) Se tirarmos 100 vezes uma bola do saco,

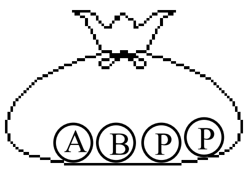
b1) tira-se de certeza pelo menos 50 vezes uma bola preta?

b2) é pouco provável que saia exactamente 40 vezes uma bola branca?

b3) é possível que nunca saia uma bola branca?

b4) é impossível que saia sempre uma bola preta?

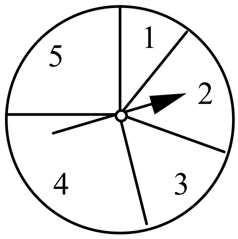
4. Um saco contém uma bola amarela (A), uma bola branca (B) e duas bolas pretas (P). Sem ver, tiram-se duas bolas do saco.



É <u>certo</u>, <u>possível</u> (mas não certo) ou <u>impossível</u> obter?

a) Uma bola amarela e uma bola preta.
b) Duas bolas pretas.
c) Duas bolas brancas.
d) Duas bolas não brancas.
e) Uma bola amarela e outra não amarela.
f) Uma bola branca ou preta.
g) Uma bola amarela ou não amarela.
h) Uma bola amarela ou não branca.

5. A roleta da figura seguinte está dividida em cinco partes diferentes, cada uma representada por um número de 1 a 5. Roda-se a roleta e, depois de parar, regista-se o número assinalado pelo ponteiro.



Observando a roleta e considerando que rodou apenas uma vez, defina:

a) dois acontecimentos <u>possíveis</u> (mas não certos);
b) dois acontecimentos <u>impossíveis</u>;
c) dois acontecimentos <u>certos</u>.

2. PROBABILIDADE EM EXPERIÊNCIAS SIMPLES

2.1. Avaliação de probabilidades

Actividade 1 – Comparar probabilidades em dois sacos

Em cada uma das seis situações seguintes, observe o conteúdo de cada um dos dois sacos apresentados. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos.

Em cada uma das situações seguintes, é mais provável tirar uma bola branca do saco I ou do saco II? Porquê?

Situação 1	Saco I: ○○●●●	Saco II: ○○○●●
Situação 2	Saco I: ○○●●	Saco II: ○○●●●
Situação 3	Saco I: ○●●	Saco II: ○○●●●
Situação 4	Saco I: ○●	Saco II: ○○●●
Situação 5	Saco I: ○○●●	Saco II: ○○○●●●
Situação 6	Saco I: ○○●	Saco II: ○○○○●●

Objectivos

Incentivar os alunos a exprimirem as suas ideias.
Confrontar as ideias dos alunos.
Comparar probabilidades de acontecimentos em experiências simples.

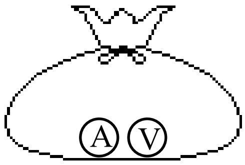
Sugestões metodológicas

Os alunos trabalham individualmente. O professor lidera a discussão sobre as respostas dadas. Perante respostas diferentes, o professor deve procurar chegar à resposta correcta a partir das explicações solicitadas aos alunos. Em alternativa, o professor pode confrontar os alunos com uma nova situação que se enquadre no raciocínio dos alunos e que tenda a contrariar as respostas erradas.

2.2. Conceito clássico de probabilidade: probabilidades *a priori*

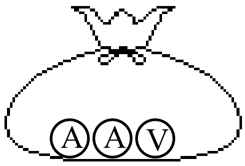
Actividade 1 – Extracção de uma bola de um saco

Colocar num saco uma bola amarela (A) e uma bola verde (V). Sem ver, tira-se uma bola do saco.



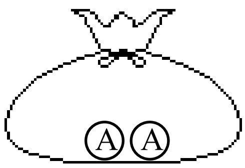
a) Quais são os resultados possíveis?
b) As probabilidades de obter qualquer uma das bolas do saco são iguais ou diferentes? Porquê?
c) Qual é a probabilidade de tirar a bola amarela? E a bola verde?
d) Depois de se ter tirado três vezes seguidas a bola verde, será mais provável obter uma das bolas? Qual? Porquê?

Colocar no saco mais uma bola amarela (A).



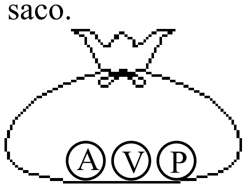
a) Quais são os resultados possíveis?
b) As probabilidades de obter qualquer uma das bolas do saco são iguais ou diferentes? Porquê?
c) As probabilidades de obter uma bola amarela ou a bola verde são iguais ou diferentes? Porquê?
d) Qual é a probabilidade de tirar uma bola amarela? E a bola verde?

Retirar do saco a bola verde (V).



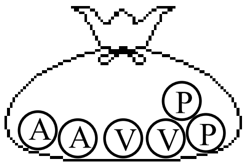
a) Quais são os resultados possíveis?
b) Qual é a probabilidade de tirar uma bola amarela? E uma bola verde?

Retirar do saco uma bola amarela (A) e colocar uma bola verde (V) e uma bola preta (P). Sem ver, tira-se uma bola do saco.



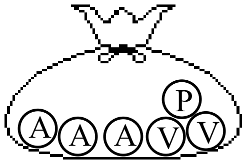
a) Quais são os resultados possíveis?
b) As probabilidades de obter a bola amarela, a bola verde ou a bola preta são iguais ou diferentes? Porquê?
c) Qual é a probabilidade de tirar a bola amarela? E a bola verde? E a bola preta?

Colocar no saco mais uma bola de cada cor.



a) As probabilidades de obter uma bola amarela, uma bola verde ou uma bola preta são iguais ou diferentes? Porquê?
b) Qual é a probabilidade de tirar uma bola amarela? E uma bola verde? E uma bola preta?

Substituir uma bola preta (P) por uma bola amarela (A).



a) As probabilidades de obter uma bola amarela, uma bola verde ou uma bola preta são iguais ou diferentes? Porquê?
b) Qual é a probabilidade de tirar uma bola amarela? E uma bola verde? E uma bola preta?
c) Que bolas devemos retirar do saco de modo que:
   c1) a probabilidade de tirar uma bola preta seja 1/4?
   c2) a probabilidade de tirar uma bola verde seja 1/2?
   c3) a probabilidade de tirar uma bola amarela seja 2/3?
d) Que bolas devemos acrescentar às existentes no saco de modo que:
   d1) a probabilidade de tirar uma bola preta seja 1/2?
   d2) a probabilidade de tirar uma bola verde seja 2/3?
   d3) a probabilidade de tirar uma bola amarela seja 3/4?

Lei de Laplace

Sempre que temos uma experiência em que todos os seus resultados são igualmente prováveis, isto é, *equiprováveis*, podemos definir a probabilidade de um acontecimento A, como sendo

$$p(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a } A}{\text{número total de casos possíveis}}.$$

Objectivos

Enumerar os casos possíveis e os casos favoráveis de um acontecimento.
Determinar a probabilidade de um acontecimento.

Sugestões metodológicas
Exploração orientada pelo professor. O professor deve concretizar cada uma das situações recorrendo a um saco com as respectivas bolas. Por fim, o professor enuncia a lei de Laplace.

Actividade 2 – Lançamento de um dado

Lança-se um dado e soma-se o número de pintas da face que fica virada para cima.

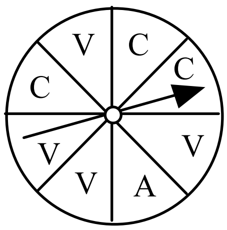
a) Quais são os resultados possíveis?
b) A probabilidade de obter qualquer face do dado é igual ou é diferente? Porquê?
c) Qual é a probabilidade de:
c1) obter o número 6?
c2) obter um número par?
c3) obter um número positivo?
c4) obter um número maior do que 10?
c5) não obter o número 4?
c6) não obter um número menor do que 3?
c7) não obter um número maior do que 6?
c8) obter um número maior do que 2 e menor do que 5?
c9) obter um número maior do que 4 ou menor do que 3?
c10) obter um número maior do que 2 ou menor do que 5?

Objectivos
Enumerar os casos possíveis e os casos favoráveis de um acontecimento.
Determinar a probabilidade de um acontecimento.

Sugestões metodológicas
Os alunos trabalham em pares. O professor lidera a discussão sobre as respostas dadas. Perante dificuldades dos alunos, o professor concretiza o acontecimento com o dado.

Actividade 3 – Roleta dividida em partes iguais

Uma roleta está dividida em oito partes iguais, sendo pintadas às cores vermelha (V), castanha (C) e azul (A), como se mostra na figura seguinte. Roda-se a roleta e regista-se a cor assinalada pelo ponteiro.



a) Quais são os resultados possíveis?
b) Na experiência de rodar a roleta, a probabilidade de obter qualquer uma das oito partes em que está dividida é igual ou é diferente? Porquê?
c) Qual é a cor que é mais provável obter? Porquê?
d) Qual é a cor que é menos provável obter? Porquê?

e) Qual é a probabilidade de:

e1) obter a cor vermelha?	*e2*) obter a cor azul?
e3) obter a cor branca?	*e4)* obter a cor vermelha ou azul?
e5) obter a cor castanha ou azul?	*e6)* não obter a cor vermelha?
e7) não obter a cor preta?	*e8)* não obter a cor vermelha nem castanha?

Objectivos

Enumerar os casos possíveis e os casos favoráveis de um acontecimento.
Determinar a probabilidade de um acontecimento.

Sugestões metodológicas

Os alunos trabalham em pares. O professor lidera a discussão sobre as respostas dadas.

Actividade 4 – Extracção de uma carta de um baralho

Depois de bem baralhadas as 40 cartas de um baralho, extrai-se, sem ver, uma carta.

a) Quais são os resultados possíveis?
b) A probabilidade de obter qualquer carta é igual ou é diferente? Porquê?
c) Qual é a probabilidade de extrair:
 c1) uma carta de ouros?
 c2) o rei de paus?
 c3) uma carta sem figura?
 c4) um rei ou um ás?
d) Qual é a probabilidade de não extrair:
 d1) uma carta de paus?
 d2) o ás de espadas?
 d3) uma dama ou um rei?
 d4) uma carta de copas nem um duque?

Objectivos

Enumerar os casos possíveis e os casos favoráveis de um acontecimento.
Determinar a probabilidade de um acontecimento.

Sugestões metodológicas

O professor começa por mostrar aos alunos um baralho de 40 cartas, referindo os naipes e as cartas de cada naipe. Além disso, os alunos poderão observar e manusear um baralho de cartas. Os alunos trabalham em pares. O professor lidera a discussão sobre as respostas dadas.

Actividade 5 – Saco de conteúdo desconhecido

Relativamente a três sacos com bolas, sabe-se que:
 Saco A: tem 8 bolas brancas e 16 bolas verdes;
 Saco B: tem 16 bolas brancas e 8 bolas verdes;
 Saco C: tem 4 bolas brancas e 20 bolas verdes.

a) Como podemos saber qual é o saco que tem uma dada composição de bolas das duas cores, se os três sacos não foram marcados?
b) Seis alunos tiram uma bola cada um. Que se verifica? Qual é o saco?
c) Mais seis alunos tiram uma bola cada um. Que se verifica? Qual é o saco?
d) Mais seis alunos tiram uma bola cada um. Que se verifica? Qual é o saco?
e) Mais seis alunos tiram uma bola cada um. Que se verifica? Qual é o saco?
f) Tem-se a certeza que se trata realmente do saco escolhido?
g) Mais seis alunos tiram uma bola cada um. Que se verifica? Qual é o saco?
h) Tem-se a certeza que se trata realmente do saco escolhido?

Síntese teórica

- O processo utilizado para identificar o saco designa-se por amostragem aleatória.
- O processo é aleatório porque não podemos prever a bola que sairá numa única extracção. Contudo, fazendo muitas extracções emerge um padrão que nos permite dizer com uma certa probabilidade qual é o saco donde foram tiradas as bolas. Deve notar-se que quanto mais extracções efectuarmos maior é a probabilidade de escolhermos o saco correcto.

Objectivos
Enumerar os casos possíveis e os casos favoráveis de um acontecimento.
Determinar a probabilidade de um acontecimento.
Aplicar a probabilidade de um acontecimento para resolver problemas.

Sugestões metodológicas
Exploração orientada pelo professor. À medida que os alunos extraem as bolas do saco comparam a razão do número de bolas de cada cor com as correspondentes razões de cada saco. O professor estabelece a síntese teórica.

2.3. Conceito frequencista de probabilidade: probabilidades *a posteriori*

Actividade 1 – Lançamento de uma moeda
Lança-se uma moeda ao ar e regista-se a face que fica virada para cima.
a) Quais são os resultados possíveis?
b) Na experiência de lançamento de uma moeda ao ar, a probabilidade de obter qualquer face da moeda é igual ou é diferente? Porquê?

Atirar uma moeda ao ar 20 vezes e registar os resultados obtidos na tabela seguinte.

	Contagem	Total
Cara		
Escudo		
Total		

c) Que percentagem de vezes saiu cara? E escudo?
d) Comparar os resultados obtidos em três pares.
e) Os resultados obtidos coincidem com o que se esperava observar?
f) Considerar os resultados de cinco pares (a que correspondem 100 lançamentos) e calcular as respectivas percentagens.
g) Considerar os resultados de todos os pares e calcular as respectivas percentagens.
h) Comparar as percentagens obtidas por um par, cinco pares e todos os pares. O que se observa?

Síntese teórica

• A frequência relativa é considerada um valor aproximado da probabilidade.
• À medida que se aumenta o número de experiências, em geral, a variação dos resultados em torno do valor médio diminui.

Objectivos
Determinar a frequência relativa de um acontecimento.
Utilizar a frequência relativa para estimar a probabilidade de um acontecimento.
Organizar informação em tabelas.

Sugestões metodológicas
Os alunos trabalham em pares. Exploração orientada pelo professor. Por fim, o professor estabelece a síntese teórica.

Actividade 2 – Ida ao cinema

Registou-se, durante a semana passada, o número de pessoas que foram ao cinema ver um filme. Dos dados obtidos, concluiu-se que, das 2000 pessoas que viram o filme, 1200 eram homens.
a) Qual foi a percentagem de mulheres que viram o filme durante a semana passada?
b) Supondo que hoje vão 340 pessoas ao cinema ver o mesmo filme, quantas dessas pessoas se espera que sejam homens?
c) Supondo que amanhã vão 150 homens ao cinema ver o mesmo filme, quantas pessoas ao todo se espera que vão ver esse filme?

Objectivos
Determinar percentagens.
Aplicar o conceito de frequência relativa à resolução de problemas.

Sugestões metodológicas
Os alunos trabalham individualmente. O professor lidera a discussão sobre as respostas dadas.
Com esta actividade pretende-se que o aluno identifique e utilize informação conhecida para fazer previsões, discutindo a relevância dessa informação.

Actividade 3 – Lançamento de *punaises*

Na experiência de lançamento de um *punaise*, a probabilidade que ele fique com a ponta virada para cima ou para baixo é igual ou é diferente? Porquê?

Colocar 20 *punaises* num copo opaco. Tapar o copo com a mão, abanar o copo e deitar os *punaises* sobre a mesa. Contar o número de *punaises* que ficaram com "a ponta virada para cima" e o número de *punaises* que ficaram com "a ponta virada para baixo". Finalmente, registar os dados na tabela seguinte.

Nº de *punaises* com "a ponta virada para cima	
Nº de *punaises* com "a ponta virada para baixo"	
Total	

Utilize os dados obtidos para responder às seguintes questões.

a) É mais provável o *punaise* ficar com a ponta virada para baixo ou para cima?

b) Se um *punaise* é lançado sobre a mesa, estimar a probabilidade de ficar com a ponta virada para cima.

c) Se um copo contendo 100 *punaises* é virado sobre a mesa, quantos *punaises* é de esperar que fiquem com a ponta virada para baixo?

d) Combinar os dados de 5 pares de modo a obterem-se dados referentes a 100 *punaises*. Responder de novo às três questões anteriores.

e) Há algumas diferenças em relação às primeiras três respostas? Em quais das respostas podemos ter mais confiança?

Objectivos

Determinar a frequência relativa de um acontecimento.
Utilizar a frequência relativa para estimar a probabilidade de um acontecimento.
Organizar informação em tabelas.

Sugestões metodológicas

Os alunos trabalham em pares. Exploração orientada pelo professor.

Actividade 4 – Praticar desporto

Escolheram-se, ao acaso, 25 estudantes de uma escola e perguntou-se a cada um deles se praticava ou não desporto. Os dados obtidos foram registados, segundo o sexo dos estudantes, na tabela seguinte.

	Rapariga	Rapaz	Total
Pratica desporto	8	6	14
Não pratica desporto	7	4	11
Total	15	10	25

a) O que significa o número 4 da tabela? E o número 8? E o número 14? E o número 10?

b) Escolhe-se, novamente ao acaso, um outro estudante da escola.

b1) Estime a probabilidade de que esse estudante seja rapaz.

b2) Estime a probabilidade de que esse estudante pratique desporto.

b3) Estime a probabilidade de que esse estudante seja rapariga e pratique desporto.

b4) Sabendo que o estudante pratica desporto, qual é a probabilidade de ser rapaz?

c) Se a escola tem 800 estudantes, quantos é de esperar que pratiquem desporto?

d) Sabendo que na escola há 400 rapazes que praticam desporto, quantos estudantes é de esperar que tenha a escola?

Objectivos

Determinar a frequência relativa de um acontecimento.
Utilizar a frequência relativa para estimar a probabilidade de um acontecimento.
Ler informação em tabelas.

Sugestões metodológicas

Os alunos trabalham em pares. Exploração orientada pelo professor.

Actividade 5 – À procura da chave

O Senhor Antunes está decidido a acabar de uma vez por todas com a bebida em virtude dos problemas que esta lhe causa. Para além dos merecidos "sermões" que o esperam da família, ele tem de superar um sério obstáculo: abrir a porta.
Soltas, no interior do seu bolso, leva as suas cinco chaves. Ao chegar à porta mete a mão ao bolso e tira, ao acaso, uma chave com que tenta abrir a porta. Se não consegue, coloca de novo a chave no bolso, mistura-a com as outras e volta a tirar uma chave. Repete esta operação até tirar a chave correcta.
Quantas chaves terá de experimentar até conseguir entrar em casa?

Uma noite um dos seus amigos de bebida, o Senhor Silva, sugeriu-lhe uma nova estratégia: "Quando uma chave não te serve, atira-a ao chão e experimenta outra."
Seguindo esta nova estratégia, quantas chaves terá de experimentar até conseguir abrir a porta?

Objectivos

Aplicar o conceito frequencista de probabilidade à resolução de problemas.

Sugestões metodológicas

Os alunos trabalham em pares. Exploração orientada pelo professor.
Para resolver o problema pode-se recorrer à técnica de simulação. Para tal, considera-se um saco com quatro bolas brancas e uma bola preta, correspondendo a bola preta à chave que abre a porta. Cada par de alunos extrai sucessivamente (com ou sem reposição, conforme a situação) uma bola até obter a bola preta e regista o número de bolas extraídas. Repete esta experiência 10 vezes. Finalmente, o número de chaves que é pedido no problema é calculado através da média aritmética do número de bolas extraídas em todas as experiências efectuadas por todos os pares.

2.4. Actividades sobre o subtema

1. Em cada uma das alíneas, observe o conteúdo de cada um dos dois sacos e assinale a resposta correcta.

a) **Saco I:** ○○○● **Saco II:** ○●●●

O Ricardo escolheu um dos sacos e, sem ver, tirou uma bola desse saco, anotou a sua cor e colocou-a de novo no saco. Repetiu este procedimento mais três vezes.

Sabendo-se que o Ricardo obteve quatro bolas pretas, de qual dos sacos tirou ele as bolas?

☐ De certeza do saco I.
☐ De preferência do saco I.
☐ De qualquer um dos sacos, pois não há razão para preferir um deles.
☐ De preferência do saco II.
☐ De certeza do saco II.

b) **Saco I:** ○○○ **Saco II:** ○●●●

A Catarina escolheu um dos sacos e, sem ver, tirou uma bola desse saco, anotou a sua cor e colocou-a de novo no saco. Repetiu este procedimento mais três vezes.

Sabendo-se que a Catarina obteve uma bola branca e três bolas pretas, de qual dos sacos tirou ela as bolas?

☐ De certeza do saco I.
☐ De preferência do saco I.
☐ De qualquer um dos sacos, pois não há razão para preferir um deles.
☐ De preferência do saco II.
☐ De certeza do saco II.

c) **Saco I:** ○○○ **Saco II:** Desconhecido

O Jorge escolheu um dos sacos e, sem ver, tirou uma bola desse saco, anotou a sua cor e colocou-a de novo no saco. Repetiu este procedimento mais três vezes.

Sabendo-se que o Jorge obteve quatro bolas brancas, de qual dos sacos tirou ele as bolas?

☐ De certeza do saco I.
☐ De preferência do saco I.
☐ De qualquer um dos sacos, pois não há razão para preferir um deles.
☐ De preferência do saco II.
☐ De certeza do saco II.

2. Um saco contém 4 bolas brancas, 3 bolas pretas e 5 bolas vermelhas. As bolas são todas iguais excepto na cor. Sem ver, tira-se uma bola do saco.

Em cada uma das alíneas seguintes, assinale a resposta correcta e justifique.

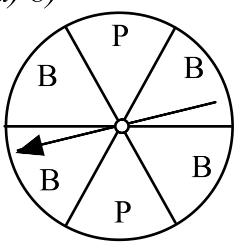
a) Qual dos acontecimentos é mais provável?
☐ Obter uma bola branca ou preta.
☐ Obter uma bola preta ou vermelha.
☐ Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.

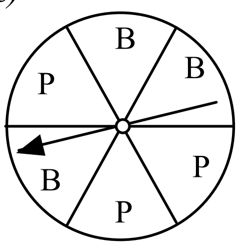
b) Qual dos acontecimentos é mais provável?
☐ Obter uma bola branca ou vermelha.
☐ Obter uma bola preta ou não preta.
☐ Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.

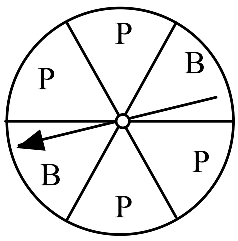
c) Qual dos acontecimentos é mais provável
☐ Obter uma bola não vermelha.
☐ Obter uma bola preta ou não vermelha.
☐ Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.

3. Relativamente à experiência de lançamento de um dado, diga, em cada caso, se algum dos acontecimentos é mais provável. Justifique a resposta.
a) "Obter o número 2"ou "Obter o número 4".
b) "Obter o número 5" ou "Obter um número diferente de 5".
c) "Obter um número menor do que 3" ou "Obter um número maior do que 3".
d) "Obter um número menor do que 6" ou "Obter um número diferente de 6".
e) "Obter um número diferente de 4" ou "Obter um número maior do que 2".
f) "Obter um número diferente de 4" ou "Obter um número diferente de 2".

4. Cada uma das roletas seguintes foi dividida em seis partes iguais, das quais algumas foram pintadas a preto (P) e as restantes foram pintadas a branco (B).
Girando cada uma das roletas, qual é a cor em que é mais provável parar o ponteiro?
a) b) *c)*







5. Numa urna há 10 bolas brancas, 15 bolas vermelhas e 5 bolas pretas. Sem ver, tira-se uma bola da urna. Qual é a probabilidade de obter:
a) uma bola branca?
b) uma bola preta?
c) uma bola não preta?
d) uma bola vermelha ou preta?
e) uma bola que não seja branca nem preta?
f) uma bola branca ou não branca?
g) uma bola branca ou uma bola vermelha ou uma bola preta?

6. Num saco há bolas amarelas, verdes e azuis, num total de 60 bolas. Sabendo que o número de bolas amarelas é 15 e que a probabilidade de extrair uma bola verde é $\frac{1}{3}$, determine:
a) o número de bolas verdes existentes no saco;
b) o número de bolas azuis existentes no saco;
c) a probabilidade de extrair uma bola amarela;
d) a probabilidade de extrair uma bola azul.

7. Lança-se um dado e regista-se o número de pintas da face que fica virada para cima.

a) Calcule a probabilidade de obter:
a1) um número par;
a2) um número ímpar;
a3) um número par ou ímpar.
Que relação existe entre as probabilidades?

b) Calcule a probabilidade de obter:
b1) um número maior do que 3;
b2) um número menor do que 5;
b3) um número maior do que 3 ou menor do que 5.
Que relação existe entre as probabilidades?

c) Calcule a probabilidade de obter:
c1) o número 2;
c2) um número diferente de 2.
Que relação existe entre as probabilidades?

8. Baralham-se bem as 40 cartas de um baralho. Seguidamente, extrai-se, sem ver, uma carta do baralho. Qual é a probabilidade de extrair?
a) Uma carta de copas.
b) Uma dama ou um valete.
c) Uma carta que não tenha figura.
d) Uma carta de paus ou uma carta com figura.
e) Um rei ou uma carta que não seja vermelha.
f) Uma carta que não seja de espadas nem ás.

9. Lança-se um dado 30 vezes, conta-se o número de vezes que saiu cada uma das faces e registam-se os resultados na tabela seguinte.

	Nº 1	Nº 2	Nº 3	Nº 4	Nº 5	Nº 6
Contagem						
Total						

Use os dados obtidos para responder às seguintes questões.
a) Obtiveram-se todos os seis números? Esperava, em 30 lançamentos, obter cada número pelo menos uma vez? Porquê?
b) Estime a probabilidade de obter o número 3.
c) Estime a probabilidade de obter o número 3 ou o número 5.

d) Estime a probabilidade de obter um número ímpar.
e) Estime a probabilidade de obter um número maior do que 2 e menor do que 5.
f) Se o dado fosse lançado mais 150 vezes, quantas vezes se esperaria obter a face 5 nesses 150 lançamentos? E um número par?
g) Se lançarmos o dado um grande número de vezes, tão grande quanto possa imaginar, o que aconteceria às probabilidades de obter cada uma das faces?

10. Os dados da tabela seguinte referem-se às classificações positivas e negativas obtidas pelos rapazes e raparigas de uma turma do 9º ano num teste de Matemática.

	Positiva	Negativa	Total
Raparigas	7	3	10
Rapazes	10	5	15
Total	17	8	25

a) O que significa o número 5 na tabela? E o número 7? E o número 10? E o número 17? Quantos alunos tem a turma?
b) Escolhe-se um aluno da turma ao acaso.
b1) Qual é a probabilidade de ser rapaz?
b2) Qual é a probabilidade de ser rapariga e ter tirado negativa no teste?
b3) Sabendo que o aluno escolhido é rapaz, qual é a probabilidade de ter tirado positiva no teste?

10. Observe as palavras do parágrafo seguinte – extraído da obra *Memorial do Convento* de *José Saramago* – e conte o número de letras de cada palavra.

"Sendo os haveres tão poucos, uma viagem chegou para transportar, à cabeça de Blimunda e às costas e Baltazar, a trouxa e o atado a que se resumiu tudo. Descansaram aqui e além no caminho, calados, nem tinham que dizer, se até uma simples palavra sobra se é a vida que está mudando, muito mais que estarmos nós mudando nela. Quanto à leveza do fardo, assim deveria ser de cada vez, levarem consigo mulher e homem o que têm, e cada um deles ao outro, para não terem de tornar sobre os mesmos passos, é sempre tempo perdido, e basta." (pp. 87-88)

Use a tabela seguinte para registar os dados obtidos.

Número de letras da palavra	Contagem	Frequência absoluta
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9 ou mais letras		

a) Escolhendo ao acaso uma palavra do parágrafo, qual é a probabilidade de obter uma palavra com
  a1) uma letra?
  a2) quatro letras?
  a3) menos do que quatro letras?
  a4) oito letras ou mais?

b) Considerando que o parágrafo é representativo da obra no que respeita ao número de letras por palavra,
  b1) quantas palavras de três letras é de esperar encontrar num parágrafo com 100 palavras?
  b2) quantas palavras com menos de cinco letras é de esperar encontrar num parágrafo com 100 palavras?
  b3) quantas palavras com pelo menos sete letras é de esperar encontrar num parágrafo com 200 palavras?

11. Na tabela seguinte listam-se o número de multas passadas pela polícia aos condutores de automóvel de uma cidade e as respectivas razões das multas.

Número de multas e respectivas causas dos 10 000 condutores de automóvel de uma cidade	
Razão da multa	Número de condutores multados
Excesso de velocidade	245
Manobras perigosas	168
Estado do automóvel	124
Documentação do automóvel	93
Excesso de álcool no sangue	118
Outras	152

Considere um condutor de automóvel da cidade.

a) Qual é a probabilidade do condutor ser multado por:
  a1) efectuar manobras perigosas?
  a2) não ter a documentação do automóvel em ordem?
  a3) circular com excesso de velocidade ou com excesso de álcool no sangue?

b) Qual é a probabilidade do condutor não ser multado?

c) Qual é a probabilidade do condutor ser multado, sabendo que não viajava com excesso de velocidade?

d) Qual é a probabilidade do condutor ser multado, sabendo que não efectuou manobras perigosas nem tinha excesso de álcool no sangue?

12. Num certo jogo, recorre-se a um dado para estabelecer o momento em que cada um dos jogadores começa a jogar. Com esse fim, cada jogador lança o dado na sua vez e só pode começar a jogar quando lhe sair o número três.
Algumas vezes o número três sai de imediato, mas outras vezes é desesperante ver como os nossos companheiros de jogo avançam sem que nós possamos começar a jogar.
Ao fim de quantos lançamentos do dado um jogador pode esperar obter o número três?

13. Temos uma moeda e pretendemos saber se ela é ou não viciada.
a) Que procedimento devemos usar para verificar se a moeda é ou não viciada?
b) Em que condições podemos concluir que a moeda é viciada?

14. Temos um dado e pretendemos saber se ele é ou não viciado.
a) Que procedimento devemos usar para verificar se o dado é ou não viciado?
b) Em que condições podemos concluir que o dado não é viciado?

15. Verificou-se que um teste médico para detectar uma doença, que ocorre em 1% da população, tem uma precisão de 98%. Suponha que foi submetido ao teste, tendo o resultado sido positivo. Quão preocupado deve estar em realmente ter a doença?
a) Discuta as questões:
a1) De 100 pessoas, quantas é de esperar que tenham a doença? E de 200? E de 10000?
a2) O que significa ter resultados "positivo" e "negativo" no teste?
a3) O que significa o teste ter uma precisão de 98%?
a4) Quando as pessoas que têm a doença são testadas, que percentagem delas têm resultados negativos incorrectos?
a5) Quando as pessoas que não têm a doença são testadas, que percentagem delas têm resultados positivos incorrectos?
b) Imagine que há 10 000 pessoas sentadas num auditório.
b1) Quantas pessoas no auditório não teriam a doença?
b2) De todas as pessoas que têm a doença, quantas tiveram um teste positivo?
b3) De todas as pessoas que não têm a doença, quantas tiveram um teste positivo?
c) Porque o seu teste foi positivo, considere todas as pessoas no auditório que tiveram teste positivo.
c1) Ao todo, quantas pessoas tiveram teste positivo?
c2) Quantas pessoas têm de facto a doença?
c3) Que fracção/percentagem daqueles que tiveram teste positivo têm de facto a doença?
c4) Então, quais são as suas chances de realmente ter a doença se teve um teste positivo?

3. PROBABILIDADE EM EXPERIÊNCIAS COMPOSTAS

3.1. Avaliação e cálculo de probabilidades

Actividade 1 – Lançamento de dois dados, lançamento de duas moedas e extracção de duas bolas de um saco

Lançamento de dois dados

Lançam-se dois dados de uma só vez e conta-se o número de pintas das faces que ficam viradas para cima.

a) Algum dos acontecimentos seguintes é mais provável? Porquê?
Obter números diferentes em cada um dos dados;
Obter números iguais em ambos os dados.

b) Algum dos acontecimentos seguintes é mais provável? Porquê?
Obter o número 4 num dado e o número 5 no outro dado;
Obter o número 4 em ambos os dados;
Obter o número 5 em ambos os dados.

Lançar 20 vezes dois dados de cores diferentes e registar os resultados obtidos na tabela seguinte.

	Obter números iguais	Obter números diferentes
Contagem		
Total		

a) Observando os resultados obtidos, que conclusão se pode tirar?
b) Quando lançamos dois dados, quais são os resultados possíveis?
c) Determinar a probabilidade de obter:
c1) Faces iguais em ambos os dados;
c2) Faces diferentes em ambos os dados;
c3) A face 4 num dado e a face 5 no outro dado;
c4) A face 5 em ambos os dados.
d) Lançar dois dados de uma só vez é equivalente a lançar duas vezes seguidas um dado?
e) Quando se lança um dado duas vezes seguidas, o resultado do 2º lançamento depende do resultado do 1º lançamento?

Lançamento de duas moedas

Lançam-se duas moedas ao ar de uma só vez e registam-se as faces que ficam viradas para cima.

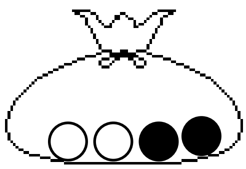
Algum dos acontecimentos seguintes é mais provável? Porquê?
Obter a face cara em ambas as moedas;
Obter a face escudo em ambas as moedas;
Obter faces diferentes nas duas moedas.

Lançar 20 vezes duas moedas diferentes e registar os resultados obtidos na tabela seguinte.

	Obter a face cara nas duas moedas	Obter a face escudo nas duas moedas	Obter faces diferentes nas duas moedas
Contagem			
Total			

a) Observando os resultados obtidos, que conclusão se pode tirar?
b) Quando lançamos duas moedas, quais são os resultados possíveis?
c) Determinar a probabilidade de obter:
  c1) a face cara em ambas as moedas;
  c2) a face escudo em ambas as moedas;
  c3) faces iguais em ambas as moedas;
  c4) faces diferentes em ambas as moedas.
d) Lançar duas moedas de uma só vez é equivalente a lançar duas vezes seguidas uma moeda?
e) Quando se lança uma moeda duas vezes seguidas, o resultado do 2º lançamento depende do resultado do 1º lançamento?

Extracção de duas bolas de um saco
Um saco contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. Sem ver, tiram-se de uma só vez duas bolas do saco.



Algum dos acontecimentos seguintes é mais provável? Porquê?
  Obter duas bolas brancas;
  Obter duas bolas pretas;
  Obter uma bola branca e uma bola preta.

Extrair duas bolas do saco e registar o resultado obtido na tabela seguinte. Repetir este procedimento 20 vezes.

	Obter duas bolas brancas	Obter duas bolas pretas	Obter uma bola branca e uma bola preta
Contagem			
Total			

a) Observando os resultados obtidos, que conclusão se pode tirar?
b) Quando extraímos duas bolas do saco, quais são os resultados possíveis?
c) Determinar a probabilidade de obter:
  c1) duas bolas brancas;
  c2) duas bolas pretas;
  c3) uma bola branca e uma bola preta.

Objectivos
Incentivar os alunos a exprimirem as suas ideias.
Confrontar as ideias dos alunos.
Enumerar os casos possíveis e os casos favoráveis de um acontecimento.
Utilizar técnicas de contagem simples.
Determinar a probabilidade de um acontecimento.

Sugestões metodológicas
Os alunos trabalham em pares. O professor lidera a discussão sobre as respostas dadas. Nesta actividade os alunos começam por fazer avaliações probabilísticas, realizam experiências e, finalmente, calculam probabilidades de acontecimentos.
Recorrer a tabelas de dupla entrada e diagramas de árvore para descrever os casos possíveis e os casos favoráveis.

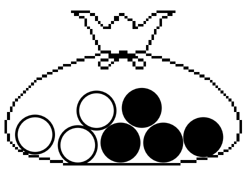
3.2. Cálculo de probabilidades

Actividade 1 – Soma dos pontos de dois dados
Lançam-se dois dados e somam-se as pintas das faces que ficam viradas para cima.
Qual é a probabilidade de obter:
a) a soma 3?
b) a soma 7?
c) uma soma superior a 5?
d) uma soma inferior a 11?
e) uma soma superior a 6 e inferior a 10?

Objectivos
Enumerar os casos possíveis e os casos favoráveis de um acontecimento.
Utilizar técnicas de contagem simples.
Determinar a probabilidade de um acontecimento.

Sugestões metodológicas
Os alunos trabalham em pares. Exploração orientada pelo professor.

Actividade 2 – Extracção de duas bolas de um saco
Colocar num saco três bolas brancas e quatro bolas pretas. Sem ver, tiram-se, sucessivamente, duas bolas do saco e registam-se as suas cores.



Extracção com reposição

Colocamos a 1ª bola extraída no saco antes de retirarmos a 2ª bola.

a) A extracção da 2ª bola depende da 1ª bola extraída?

b) Qual é a probabilidade de obter:

b1) duas bolas brancas?

b2) duas bolas pretas?

b3) uma bola branca e uma bola preta?

Extracção sem reposição

Não colocamos a 1ª bola extraída no saco antes de retirarmos a 2ª bola.

a) A extracção da 2ª bola depende da 1ª bola extraída?

b) É equivalente extrair duas bolas de uma só vez ou extrair uma bola de cada vez?

c) Qual é a probabilidade de obter:

c1) duas bolas brancas?

c2) duas bolas pretas?

c3) uma bola branca e uma bola preta?

Objectivos

Relacionar a probabilidade em experiências compostas com a probabilidade em experiências simples.

Enumerar os casos possíveis e os casos favoráveis de um acontecimento.

Utilizar técnicas de contagem simples.

Determinar a probabilidade de um acontecimento.

Sugestões metodológicas

Os alunos trabalham em pares. Exploração orientada pelo professor.

Explorar a probabilidade como razão entre o número de casos favoráveis e de casos possíveis e a partir das probabilidades das experiências simples.

Actividade 3 – Extracção de duas cartas de um baralho

Baralham-se bem as 40 cartas de um baralho. Sem ver, extraem-se duas cartas do baralho.

a) Supondo que a primeira carta é colocada de novo no baralho antes de extrair a segunda, qual é a probabilidade da segunda ser:

a1) Uma carta de copas, se a primeira carta extraída foi uma carta de copas?

a2) Uma dama, se a primeira carta extraída foi um ás?

a3) O ás de espadas, se a primeira carta extraída foi o ás de espadas?

b) Supondo que a primeira carta não é colocada de novo no baralho antes de extrair a segunda, qual é a probabilidade da segunda ser:

b1) uma carta de copas, se a primeira carta extraída foi uma carta de copas?

b2) uma dama, se a primeira carta extraída foi um ás?

b3) o ás de espadas, se a primeira carta extraída foi o ás de espadas?

c) Se são extraídas duas cartas de uma só vez, qual é a probabilidade de serem:

c1) dois ases?

c2) uma de espadas e outra de paus?

c3) ambas de ouros?

c4) nenhuma de copas?

Objectivos

Relacionar a probabilidade em experiências compostas com a probabilidade em experiências simples.

Enumerar os casos possíveis e os casos favoráveis de um acontecimento.

Utilizar técnicas de contagem simples.

Determinar a probabilidade de um acontecimento.

Sugestões metodológicas

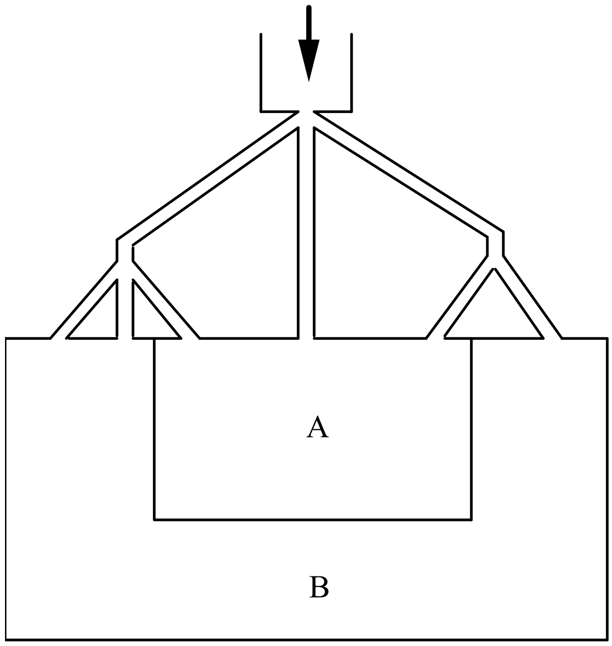
Os alunos trabalham em pares. Exploração orientada pelo professor.

Explorar a probabilidade como razão entre o número de casos favoráveis e de casos possíveis e a partir das probabilidades das experiências simples.

Actividade 4 – Os caminhos do labirinto

Na figura seguinte estão representados os vários caminhos que dão acesso aos compartimentos A e B. O José parte do local assinalado pela seta e dirige-se a um dos compartimentos com o fim de ganhar uma prenda colocada num dos compartimentos pelo seu amigo Ricardo. Sabe-se, ainda, que o José em cada ramificação dos caminhos escolhe ao acaso um deles, o que significa que existem as mesmas chances de seguir por qualquer um dos caminhos possíveis.

Em que compartimento deve o Ricardo colocar a prenda de modo que o José tenha mais chances de encontrá-la?



Objectivos

Aplicar o conceito de probabilidade à resolução de problemas.

Sugestões metodológicas

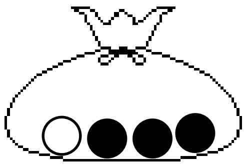
Os alunos trabalham em pares. Exploração orientada pelo professor.

Na resolução deste problema, para além de outras estratégias, pode-se recorrer ao conceito geométrico de probabilidade.

3.3. Actividades sobre o subtema

1. Lançam-se três moedas ao ar.
a) Qual é a probabilidade de obter faces iguais em todas as três moedas?
b) Qual é a probabilidade de obter faces diferentes em duas das três moedas?
c) Qual é a probabilidade de obter exactamente uma face cara?
d) Qual é a probabilidade de obter pelo menos uma face cara?
e) Qual é a probabilidade de obter no máximo duas faces escudo?

2. Colocar num saco uma bola branca e três bolas pretas. Sem ver, tiram-se duas bolas do saco.

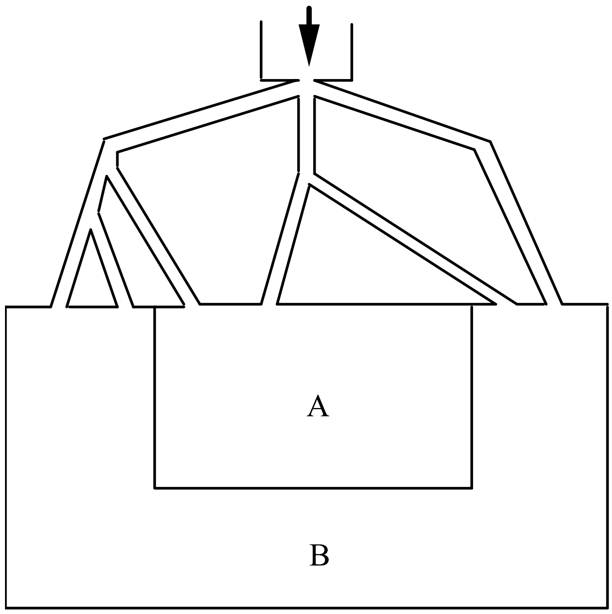


a) Qual é a probabilidade de obter duas bolas pretas?
b) Qual é a probabilidade de obter duas bolas brancas?
c) Qual é a probabilidade de obter uma bola branca e uma bola preta?

3. O Filipe tem no bolso duas moedas de 50\$00, uma de 100\$00 e uma de 200\$00. Sem ver, tirou duas moedas do bolso.
a) Qual é a probabilidade de obter a quantia de 100\$00?
b) Qual é a probabilidade de obter a quantia de 250\$00?
c) Qual é a probabilidade de obter uma quantia superior a 150\$00?
d) Qual é a probabilidade de obter uma quantia superior a 150\$00 e inferior a 250\$00?

4. Depois de bem baralhadas as 40 cartas de uma baralho, extraem-se sucessivamente, com reposição, duas cartas do baralho.
a) Qual é a probabilidade de extrair duas damas?
b) Qual é a probabilidade de extrair um rei e um ás?
c) Qual é a probabilidade de extrair uma carta de paus e um duque?
d) Qual é a probabilidade de extrair duas cartas de ouros?
e) Qual é a probabilidade de extrair duas cartas que não sejam de espadas?
f) Qual é a probabilidade de extrair pelo menos uma carta de copas?
g) Considerando que as cartas são extraídas uma depois da outra, sem reposição da primeira, determine de novo as probabilidades anteriores.

5. No labirinto seguinte, o João parte do local assinalado pela seta e dirige-se a um dos compartimentos A ou B, seguindo um caminho ao acaso.
a) Qual é a probabilidade do João atingir o compartimento A?
b) Qual é a probabilidade do João atingir o compartimento B?



6. Considere na população bracarense as famílias com três filhos e suponha que, entre os bracarenses, a probabilidade de nascer rapaz é igual à probabilidade de nascer rapariga, igual em ambos os casos a 0,5.

a) Determine a probabilidade que uma família, escolhida ao acaso, tenha:

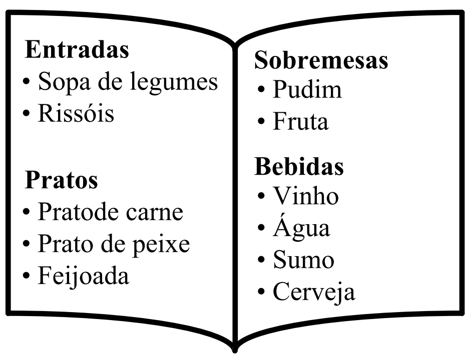
a1) três raparigas; *a2)* duas raparigas e um rapaz.

b) De entre 120 famílias com três filhos, escolhidas ao acaso, quantas será de esperar que tenham:

b1) três rapazes; *b2)* dois rapazes e uma rapariga;

b3) pelo menos um rapaz; *b4)* nenhum rapaz.

7. O menu de um snack-bar consta de duas entradas, três pratos, duas sobremesas e quatro bebidas.



a) Quantas refeições diferentes, constituídas por uma entrada, um prato, uma sobremesa e uma bebida, pode pedir um cliente?

b) Quantas refeições diferentes pode pedir a Sra. Ana, sabendo que ela não pediu nenhuma entrada?

c) Quantas refeições diferentes pode pedir o Sr. Joaquim, sabendo que ele não pediu nenhuma sobremesa e pediu vinho?

d) O empregado de mesa do snack-bar esquece-se frequentemente dos pedidos dos clientes. Qual é a probabilidade do empregado acertar no pedido do Sr. Antunes, sabendo que ainda se lembra que ele pediu rissóis e água?

A N E X O I V

RACIOCÍNIOS

Questionário-conceito clássico

Neste Anexo apresentam-se exemplos dos raciocínios referidos pelos alunos do 8º ano e do 11º ano para justificarem as respostas às perguntas do questionário-conceito clássico. Deve recordar-se que em relação às três primeiras questões não foi pedido aos alunos que referissem o raciocínio subjacente às respostas, pelo que se apresentam aqui raciocínios das questões a partir da quarta, inclusive.

Relativamente a cada raciocínio, indica-se, dentro de parêntesis, o número atribuído ao aluno e a resposta que o raciocínio explica. As três respostas possíveis de cada questão são representadas por R1, R2 e R3, correspondendo esta ordem à ordem com que as respostas aparecem no questionário.

Probabilidade em experiências simples

Questão 4

Raciocínios dos alunos do 8º ano

Comparar o número de bolas brancas

[S4, R2] Visto o saco II contém mais uma bola branca que o saco I as probabilidades são maiores para o saco II.

[S149, R2] O meu raciocínio é que tenho no saco II 3 bolas brancas e no saco I 2 bolas brancas no saco II é mais provável que saia uma bola branca tenho mais uma bola que no saco I.

Comparar o número de bolas brancas e pretas

[S14, R2] É mais provável obter uma bola branca do saco II porque neste há mais bolas brancas que no saco I, e menos pretas que no 1º saco, havendo por isso uma maior probabilidade de sair bola branca.

[S70, R2] Porque o segundo saco tem mais bolas brancas do que o primeiro saco e ambos têm o mesmo número de bolas.

[S1, R2] É possível obter mais rapidamente uma bola branca no II, porque contêm mais bolas (brancas) e menos bolas pretas, e no saco I tem menos bolas brancas e mais bolas pretas.

[S135, R2] Porque se num saco tem mais bolas brancas do que pretas as probabilidades de tirar uma bola branca são maiores.

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S17, R2] No 1º saco tenho duas hipóteses em cinco de tirar uma bola branca ou seja, se eu pudesse retirar bola a bola do saco, duas das que tirasse eram brancas contra três pretas. No saco II acontece o inverso: tenho três hipóteses de tirar bolas brancas em cinco. Se mais uma vez, eu tirasse as bolas uma a uma, seriam três bolas brancas contra duas pretas. A probabilidade é por isso maior no saco II, quando se pretende tirar uma bola branca.

[S127, R2] É que no saco I temos a possibilidade de 2 para 5 e no saco II temos a possibilidade de 3 para 5.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S134, R3] Apesar de no saco II o número de bolas brancas ser superior, isso não impede que se obtenha uma bola branca do saco I, logo, ambos os sacos têm probabilidades de obter a bola branca.

[S167, R3] É provável porque nos dois sacos existem bolas brancas, pode haver mais num do que outros mas é igualmente provável. Nós não estamos a ver nada.

Raciocínios dos alunos do 11º ano

Comparar o número de bolas brancas

[S3, R2] É mais provável obter uma bola branca do saco II, visto que este saco tem maior número de bolas brancas do que o saco I.

[S205, R2] Como o saco II tem a mais uma bola branca que o saco I tem uma maior probabilidade que sai a bola branca.

Comparar o número de bolas brancas e pretas

[S10, R2] Há o mesmo nº de bolas em cada saco mas no saco II há mais bolas brancas.

[S129, R2] Uma vez que o saco II tem maior número de bolas brancas relativamente ao saco I, e o saco I ter mais pretas, existem mais probabilidades de se tirar uma bola branca do saco II.

[S117, R2] É mais provável obter uma bola branca do saco II uma vez que neste saco encontram-se mais bolas brancas do que pretas, em contrapartida com o saco I.

[S190, R2] Se no saco I temos 2 bolas brancas e três pretas, é mais provável tirarmos uma bola preta, pois há mais bolas pretas. Como no saco II há mais bolas brancas (3) do que pretas (2), há mais probabilidade de tirarmos uma bola branca.

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S30, R2] Uma vez que a probabilidade de sair branca no saco I é de 2 em 5; e no saco II é de 3 em 5, logo a probabilidade no saco II é maior.

[S148, R2] O saco I tem 5 bolas: 2 brancas e 3 pretas, logo a probabilidade de tirar uma bola branca é 2/5. O saco II tem igualmente 5 bolas: 3 brancas e 2 pretas, logo a probabilidade de tirar 1 bola branca é 3/5. Como a probabilidade de tirar uma bola branca é maior no saco II do que no saco I, logo a resposta certa é o saco II.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S87, R3] Mesmo que falemos em termos matemáticos provavelmente diria o saco II; quando se refere à quantidade, números. Mas em termos de probabilidade tanto num saco como noutro contem bolas brancas logo essa probabilidade é igual. O meu raciocínio foi: a quantidade não conta é indiferente, mas a probabilidade é indefinida (por exemplo: basta a sorte).

Questão 5

Raciocínios dos alunos do 8º ano

Comparar o número total de bolas

[S129, R1] Porque o saco I têm menos bolas do que o saco II.

[S200, R1] Utilizei que é mais provável tirar no saco I, porque apenas tem quatro bolas dentro do saco. E o saco II tem cinco bolas dentro do saco.

Comparar o número de bolas pretas

[S7, R1] É mais provável obter uma bola branca do saco I, porque, no saco II, existem mais bolas pretas do que no saco I. O saco II tem 3 bolas pretas, enquanto o saco I, tem 2. Assim, é mais provável que saia uma bola branca no saco I.

[S110, R1] No saco II tem mais bolas pretas do que no saco I por isso é mais difícil tirar uma bola branca no saco II do que no saco I.

Comparar o número de bolas brancas

[S59, R3] Porque os dois sacos tem o número igual de bolas brancas.

[S130, R3] Como a quantidade de bolas brancas é igual nos dois sacos é tão provável obter uma bola branca tanto num como no outro.

Comparar o número de bolas brancas e pretas

[S25, R1] No saco I existe um menor número de bolas pretas e um igual número de bolas brancas por isso é mais provável sair no saco I.

[S117, R1] O raciocínio que utilizei foi que no saco I tem menos bolas pretas que no saco II, por isso temos mais possibilidades em acertar em bolas pretas no saco II. O nº de bolas brancas são iguais.

[S28, R1] Porque o saco I tem o mesmo valor de bolas Brancas e de Bolas pretas e o saco II tem mais bolas pretas do que brancas.

[S35, R1] No saco I o número de bolas brancas e igual ao número de bolas pretas e no saco II há mais bolas pretas que brancas.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S198, R3] Se vou pegar na bola sem ver claro que pode ser uma bola branca.

[S181, R3] O raciocínio que utilizei para responder à pergunta foi: que se a bola branca tivesse de saír tanto saíria do saco I como do saco II era preciso muita sorte mas talvez saí-se de um dos sacos.

Raciocínios dos alunos do 11º ano

Comparar o número total de bolas

[S7, R1] Do saco I porque tem menos bolas que no saco II.

[S24, R1] É do primeiro saco, porque existem menos bolas neste saco.

Comparar o número de bolas pretas

[S70, R1] Porque no saco II a quantidade de bolas pretas é superior à do saco I.

[S202, R1] Eu acho que é mais provável obtermos uma bola branca do saco I porque contém menos bolas pretas que o saco II.

Comparar o número de bolas brancas

[S61, R3] É igualmente provável obter uma bola branca de qualquer um dos sacos porque ambos contém o mesmo número de bolas brancas.

[S164, R3] Pq os dois sacos tem o mesmo nº de bolas brancas.

Comparar o número de bolas brancas e pretas

[S42, R1] Se há um igual número de bolas brancas nos 2 sacos, e se o saco 1 tem menos bolas pretas, então é mais provável sair de lá uma bola branca.

[S143, R1] Como no saco II há maior número total de bolas, e apesar do número de bolas brancas ser o mesmo, há menor probabilidade de se obter uma bola branca.

[S29, R1] No saco I existe a mesma probabilidade de sair uma bola branca ou uma preta pois ambas estão em igual número. No saco II existe maior probabilidade de sair uma bola preta pois estas estão em maior número. Sendo assim, apesar de as bolas brancas serem em igual número em ambos os sacos, há maior indice de probabilidade de sair uma bola branca no saco I.

[S163, R1] No saco I é mais provável obter uma bola branca porque existem somente quatro bolas e a probabilidade de sair uma bola branca é de 50%, enquanto que no saco II há menos probabilidade, pois existem mais bolas pretas do que brancas.

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S23, R1] No saco I a probabilidade de sair uma bola branca é de (50%) 2/4 e no saco II é de 2/5, logo é mais provável obter uma bola branca do saco I.

[S127, R1] Uma vez que no saco I há 4 bolas, 2 pretas e 2 brancas, as probabilidades de sair uma bola branca são de 50%; no saco II, há 5 bolas, 2 brancas e 3 pretas, logo as probabilidades de sair bola branca são de 40%.

Questão 6

Raciocínios dos alunos do 8º ano

Comparar o número total de bolas

[S139, R1] É mais provável o saco I porque apesar de ter menos bolas Brancas o nº de Bolas ao total é menor do que no saco II.

[S195, R1] Porque como são menos bolas no saco I acho que é mais provável.

Comparar o número de bolas pretas

[S40, R1] É mais provável obter no saco I porque são menos bolas pretas e ao tirar só por assar é que não saia.

[S106, R1] Porque só tem uma bola preta e no saco 2 tém 2 é mais provavel no saco I.

Comparar o número de bolas brancas

[S26, R2] O saco II contêm mais bolas brancas do que no saco I, assim é mais provável encontrar uma bola branca no saco II.

[S64, R2] Porque se o saco II tem um número maior de bolas brancas, é mais provável que saia uma bola branca desse mesmo saco (saco II). (Nós não as vemos a sair).

Comparar o número de bolas brancas e pretas

[S34, R3] O saco II tem mais bolas do que o saco I, mas também tem mais bolas pretas do que o saco I.

[S103, R3] Uma tem mais bolas brancas que a outra mas também tem mais pretas. Por isso é igualmente provável obter uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

[S44, R3] É igualmente provável obter uma bola branca de qualquer dos sacos porque o saco I tem 2 bolas brancas e uma preta, o saco II tem mais uma bola de cada e assim a hipotese de obter bola branca é igual.

[S166, R3] O saco I tem duas bolas brancas e uma preta mas o saco II tem a mais uma bola branca e uma bola preta portanto acho que estão equivalentes.

[S39, R3] Porque os dois sacos tem mais bolas brancas do que pretas.

[S93, R3] Porque tanto um saco como o outro tem mais bolas brancas do que pretas e por isso é mais provável obter uma bola branca.

[S8, R3] Nos dois sacos é provável obter uma bola branca porque cada um contém menos uma bola preta do que o total de bolas brancas.

[S193, R3] Porque ambos os sacos têm uma diferença de uma bola isto é no saco I tem 2 brancas e 1 preta portanto vai ser o mesmo que ter 3 brancas e 2 pretas.

Proporção do número de bolas

[S17, R1] Tenho duas hipóteses em três de conseguir a bola branca no saco I. Directamente proporcional, deveria ter no saco II quatro bolas brancas e duas pretas.

[S20, R1] No saco I porque em cada 2 bolas brancas existe uma preta e no saco II não se passa o mesmo, apesar de haver menos 1 bola preta que brancas nos 2 sacos, há mais possibilidades de obter uma branca no saco I.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S65, R3] Porque não quer dizer que um saco ter mais bolas de uma cor e não quer dizer que lhe saia a bola dessa cor.

[S94, R3] Os dois sacos têm ambos bolas brancas.

Raciocínios dos alunos do 11º ano

Comparar o número total de bolas

[S41, R1] Raciocinei do seguinte modo: uma vez que no I saco existem três bolas (1 preto e duas brancas) é mais fácil obter uma bola branca do I do que do II, pois o numero de bolas brancas apesar de ser superior às pretas nos dois sacos e mais provável sair no I a branca pois na totalidade o nº de bolas é inferior.

[S87, R1] O saco I contem o menor nº de bolas mesmo o saco II conter 3 bolas brancas a probabilidade de sair bola branca do saco I é maior. Quanto menor o nº de bolas no saco maior a probabilidade de se obter a bola Branca neste caso.

Comparar o número de bolas pretas

[S18, R1] Porque só tem apenas uma bola preta e é mais provável que obtenha uma bola branca.

[S94, R1] Porque no saco I há menos bolas pretas que no saco II.

Comparar o número de bolas brancas

[S34, R2] Penso que como o saco II tem maior número de bolas brancas a probabilidade de sair essa bola será maior do que no saco I que apenas contém 2 bolas brancas.

[S198, R2] Se há maior número de bolas brancas no saco II do que no saco I, logo a probabilidade de tirar bola branca é maior no saco II.

Comparar o número de bolas brancas e pretas

[S79, R3] O saco II contém mais uma bola branca e uma bola preta do que o saco I, logo, a probabilidade vai ser a mesma, já que a proporção das bolas é igual.

[S109, R3] Porque a probabilidade de sair no saco I é de 2/3, ou seja, tém duas bolas brancas para um todo de 3, e no saco II é de 3/5, logo é igual, porque apesar do nº de bolas brancas no saco II aumentar uma unidade, o nº de bolas pretas também aumenta uma unidade, logo as probabilidades são iguais.

[S8, R3] Nos dois sacos é provável tirar uma bola branca porque estão numericamente superiores às bolas pretas.

[S113, R3] Nos dois sacos existem mais bolas brancas do que pretas.

[S92, R3] Há tantas probabilidades no saco I como no II porque está sempre uma bola branca a mais do que as pretas.

[S171, R3] A probabilidade é igual porque em cada um dos sacos existem mais uma bola branca do que preta.

Proporção do número de bolas

[S13, R1] Seria mais provável obter-se uma bola branca no saco I pois tem 2 vezes mais bolas brancas do que pretas coisa que não acontece no saco II.

[S142, R1] Do saco I, porque só tem três bolas, enquanto que o saco II tem cinco bolas (embora tenha maior quantidade de bolas brancas). Assim, é mais provável tirar uma bola branca do saco I já que estas estão na percentagem 2:1 e no saco II a percentagem é de 3:2.

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S37, R1] Utilizei o raciocínio da regra de três simples. Existe 66% de possibilidade no saco I sair uma bola branca contra 60% do saco dois.

[S158, R1] No saco I, utilizando o mesmo raciocínio a probabilidade é de 2/3=10/15. No saco II, é de 3/5=9/15.

Questão 7

Raciocínios dos alunos do 8º ano

Comparar o número total de bolas

[S56, R1] Porque tem menor número de bolas do que o saco II.

[S196, R1] Enquanto no saco II tem 4 bolas no saco I tem só duas por isso é mais provável que sai a bola branca no saco I.

Comparar o número de bolas brancas

[S29, R2] Porque o saco II tem 2 bolas brancas enquanto que o saco I contem apenas 1 bola branca.

[S142, R2] O raciocínio que utilizei foi que no saco II é mais provável obter bola branca porque no saco I só tem 1 bola branca e no saco II tem 2 bolas brancas.

Comparar o número de bolas brancas e pretas

[S57, R3] Eu escolhi a terceira opção porque o saco II tem mais bolas brancas do que o saco I mas também tem mais bolas pretas por isso tanto é provável obter uma bola branca do saco I como do saco II.

[S83, R3] Exactamente pelo mesmo motivo da questão anterior. Ou seja, é igualmente provável pois da mesma maneira que no saco I existem menos bolas brancas também existem menos bolas pretas e no saco II embora existam mais bolas brancas também existem mais bolas pretas.

[S11, R3] Porque igualmente na pergunta 6, no saco II acrescentou-se uma bola de cada pinta, a probabilidade é igual.

[S176, R3] Porque no saco II tem mais uma bola de cada cor a mais do saco I.

[S13, R3] É igualmente provável obter uma bola branca no saco I como no saco II porque ambos os sacos contém o mesmo número de bolas brancas e pretas.

[S173, R3] É igual porque em cada um dos sacos temos tantas bolas pretas como brancas.

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S107, R3] É igualmente provável obter uma bola branca no saco I como no saco II visto que a percentagem de bolas brancas no saco I é de 50% e no saco II é de 50%.

[S185, R3] Porque o número de bolas é “igual”. Há 50% de chance se sair em qualquer saco, ou 1 bola preta ou 1 bola branca.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S41, R3] Porque tanto pode sair uma preta como uma branca nos dois casos.

[S195, R3] Acho que é igualmente provável porque tanto pode sair no saco I como nesse mesmo saco pode sair uma bola preta no saco II a mesma coisa.

Raciocínios dos alunos do 11º ano

Comparar o número total de bolas

[S50, R1] Do saco I porque tem menos bolas e as probabilidades é de 1 para 1, logo no saco II há menos probabilidades.

[S115, R1] No saco I há menos bolas que no saco II.

Comparar o número de bolas brancas

[S82, R2] O saco II porque há mais bolas brancas do que no saco I, logo a probabilidade de sair bola branca é maior que no saco I.

[S174, R2] Porque o saco II tem uma maior quantidade de bolas brancas que o saco I.

Comparar o número de bolas brancas e pretas

[S28, R3] Embora haja uma bola branca a mais no segundo saco do que no primeiro, há também uma bola preta, sendo o nosso leque de probabilidades igual.

[S189, R3] Utilizei o raciocínio de que como o saco I contém uma bola branca e uma bola preta, e o saco II contém duas bolas brancas e duas bolas pretas, ou seja, mais uma branca e mais uma preta, a probabilidade é igual nos dois sacos.

[S47, R3] Nos dois sacos existe o mesmo nº de bolas pretas e brancas.

[S134, R3] Porque em ambos os sacos têm o mesmo número de bolas brancas e pretas.

Proporção do número de bolas

[S74, R3] Como a proporcionalidade das bolas é igual, ou seja, para uma bola branca há uma bola preta, a probabilidade é igual.

[S154, R3] Porque a probabilidade nos dois sacos são iguais, no saco I é de 1/1 e no saco II a probabilidade é de 2/2=1/1, logo a probabilidade de sair bola branca é igual para os dois sacos.

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S133, R3] Considerando que as duas bolas do saco I 100% e as 4 bolas do saco II também 100%, a probabilidade de sair uma bola branca é de 50% em ambos os sacos.

[S181, R3] Saco I probabilidade 1/2=0,5. Saco II probabilidade 2/4=0,5. As probabilidades de retirar uma bola branca são iguais.

Questão 8

Raciocínios dos alunos do 8º ano

O número 5 é um número ímpar

[S27, R3] São iguais porque o nº 5 é ímpar.

[S157, R3] As duas situações anteriores são igualmente prováveis, porque o número 5 é um número ímpar.

Comparar o número de casos favoráveis

[S19, R2] Porque o número 5 é um número ímpar e visto que o dado tem 6 faces e três delas são ímpares é mais provável obter um número ímpar que pode ou não ser o número 5.

[S173, R2] É mais provável ímpar porque têm mais números 1, 3, 5.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S55, R3] Porque em ambos os casos se podem obter aqueles números ou até outros números quaisquer de 1 a 6.

[S147, R3] Todas as situações são prováveis pois nós não sabemos o número que ficou virado para cima por isso ambas as respostas são prováveis.

Raciocínios dos alunos do 11º ano

O número 5 é um número ímpar

[S35, R3] Porque o número 5 é um número ímpar.

[S81, R3] A probabilidade é a mesma porque o 5 está contido no conjunto dos n.os ímpares.

Comparar o número de casos favoráveis

[S72, R2] O número 5 é um número ímpar, logo inclui-se no grupo dos números ímpares. Assim, podemos dizer que a 1.ª alínea está contida na 2.ª alínea. Então há mais probabilidades de sair um grupo de números do que apenas um número que está contido nesse grupo.

[S121, R2] Porque para obter um numero ímpar teremos 3 probabilidades e para obter o número 5 so temos uma probabilidade.

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S76, R2] Obter o número 5 temos 1/6 de probabilidade. De obter um número ímpar temos 3/6 de probabilidade.

[S108, R2] Porque existem 3 possibilidades em 6 de obter um nº ímpar, enquanto apenas existem 1 em 6 possibilidades de sair o nº 5.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S9, R3] Além de se poder tirar um número ímpar também se poderia tirar um número par. Mas poderíamos também ter o 1 e o 3.

[S179, R3] O número 5 é ímpar e não podemos ter a certeza que o número que vai sair é cinco, tanto pode sair o cinco, como o três, como o quatro.

Questão 9

Raciocínios dos alunos do 8º ano

Comparar o número de casos favoráveis

[S61, R3] O raciocínio que eu utilizei foi o seguinte: Como o número de números pares de um dado e o número de números ímpares existem em igual quantidade, logo as probabilidades de obter um número ímpar ou um número par, são iguais.

[S123, R3] Como num dado os números pares e ímpares são iguais quanto ao número deles, as provabilidades são iguais.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S2, R3] Porque ao lançarmos o dado não sabemos se se vai obter um número ímpar ou um número par.

[S73, R3] Disse apenas que tanto pode ser um numero par como um numero impar porque o cubo e constituido de numeros pares e impares.

Raciocínios dos alunos do 11º ano

Comparar o número de casos favoráveis

[S102, R3] A quantidade de n.os pares é igual à quantidade de n.os impares.

[S124, R3] Porque no dado existe a mesma possibilidade de sair par ou ímpar. Existem 3 números pares (2, 4, 6) e existem 3 números ímpares (1, 3, 5) que podem sair.

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S65, R3] Existem 50% de probabilidades de que saia um n.o ímpar e os mesmos 50% de que saia um par (o dado tem 6 faces e metade dos n.os de cada face são ímpares e a outra metade pares).

[S150, R3] Entre 1 e 6 existem 3 n.os pares (2, 4, 6) e 3 n.os impares (1, 3, 5), assim, a probabilidade de sair um n.o par é igual à de sair um n.o impar pois ambas são iguais a: 3/6=1/2=50%.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S10, R3] Pode sair qualquer numero, tal como na anterior.

[S96, R3] Porque nós não sabemos quando atiramos o dado se vamos obter um numero par ou ímpar, pois já como disse na pergunta 8.2, só podemos desconfiar se o dado já tiver viciado.

Probabilidade em experiências compostas

Questão 10

Raciocínios dos alunos do 8º ano

É mais difícil obter duas bolas da mesma cor

[S93, R2] Tem duas cores de bolas e é mais provável que seja uma de cada porque elas estão misturadas.

[S194, R2] Se temos 2 bolas brancas e 2 bolas pretas é pouco trivial sair duas bolas brancas.

Comparar o número de casos favoráveis

[S69, R2] Só havia três pares a fazer.

p – b , b – b , p – p

Se saisse só havia mais um par que seria igual

se saisse havia outro par que seria p – p

[S105, R2] Porque tirando uma preta ou uma branca a outra cor fica com 2 bolas daí é mais provável que saia essa cor.

Comparar o número de bolas brancas e pretas

[S37, R2] Há 2 bolas brancas e 2 bolas pretas por isso é mais provável obter 1 bola branca e uma preta.

[S178, R2] Eu acho que é mais provável obter uma bola branca e uma preta porque têm igualmente duas bolas brancas e duas bolas pretas.

[S53, R3] É provável tirar uma bola preta como uma bola branca, porque a quantidade das bolas brancas é igual a quantidade das bolas pretas.

[S143, R3] As duas situações anteriores são igualmente prováveis visto haver o mesmo número de bolas brancas e pretas, existe o mesmo número de hípoteses para cada situação.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S76, R3] Acho que são igualmente prováveis pois são quatro bolas e nós poderiamos tirar 2 brancas, ou 1 branca e 1 preta dependendo da sorte.

[S97, R3] Porque o saco possui bolas brancas e bolas pretas e por isso é provável que me aconteça qualquer uma das situações.

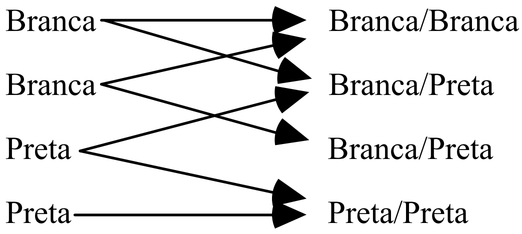
[S191, R3] Porque ninguém sabe quais são as bolas que vão sair do saco, portanto as duas situações anteriores são igualmente prováveis.

Raciocínios dos alunos do 11º ano

Comparar o número de casos favoráveis

[S56, R2] Depois de tirar uma bola (por ex. branca) restam 2 pretas e outra branca o que torna mais provável a obtenção de uma preta.

[S195, R2]



Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S43, R2] Como só existe duas bolas brancas, a probabilidade de sairem duas é uma só. Mas como existem dois pares de uma bola branca e uma bola preta, a probabilidade de obter uma bola branca e uma bola preta é dupla.

[S172, R2] Se uma das bolas é branca sobram uma bola branca e duas pretas, logo a probabilidade de se obter a outra bola branca é de 1 em 3 e de obter uma das bolas pretas é de 2 em 3.

Comparar o número de bolas brancas e pretas

[S20, R2] Porque o n.º de bolas é igual.

[S44, R2] Tendo duas bolas de cada cor torna-se provável tirar uma de cada cor.

[S5, R3] Porque tem o mesmo número de bolas brancas e pretas e é igual a probabilidade.

[S119, R3] Ao haver o mesmo numero de bolas de uma cor como de outra as probabilidades são iguais.

Equiprobabilidade de obter bola branca e bola preta

[S124, R2] Porque existem em igual número, ou seja, existe 50% de probabilidade de sair uma bola branca ou preta.

[S136, R2] Porque há 50% de probabilidade de tirar uma bola branca assim como preta.

[S93, R3] Porque temos 50% de probabilidade de obter uma bola preta ou branca.

[S112, R3] Seguindo os mesmos raciocínios: 50% – preta; 50% – branca.

Equiprobabilidade de obter qualquer bola

[S173, R3] Visto que existe o mesmo numero de bolas brancas e pretas no saco cada bola valerá 25% de hipoteses podendo sair: 50% das hipoteses uma bola branca e uma bola preta e 50% das hipoteses de sair 2 bolas brancas.

[S183, R3] Se o saco tinha 4 bolas considerando-o como 1 unidade (4/4) as hipóteses são de 50% visto que há 2 bolas de cada. Assim, há 2/4 de probabilidade de sairem 2 brancas assim como 2/4 de probabilidade de sairem uma preta e uma branca.

Equiprobabilidade dos elementos do espaço amostral

[S127, R3] Há 3 situações possiveis: 2 bolas brancas=100/3%, 2 bolas pretas=100/3% e 1 bola branca+1 bola preta=100/3%. Logo as possibilidades de obter 2 bolas brancas, ou, uma bola branca e outra preta são iguais.

[S140, R3] Existem em iguais proporções, há 3 possibilidades: duas bolas brancas, duas bolas pretas e uma bola branca e outra preta.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S6, R3] As duas situações anteriores são igualmente prováveis, porque em 4 bolas, tanto podemos tirar 2 bolas da mesma cor, como podemos tirar 2 bolas de cores diferentes.

[S200, R3] As 2 situações são igualmente prováveis pois não podemos ter a certeza que se obtem 2 bolas brancas nem temos totalmente certeza de que se obtem uma bola branca e uma bola preta. Então o grau de probabilidade é igual nas duas situações.

Questão 11

Raciocínios dos alunos do 8º ano

É mais difícil obter números iguais nos dois dados

[S90, R1] São prováveis as duas situações mas é mais fácil obter o número 5 num lado e o número 6 no outro lado do que em ambos 6.

[S156, R1] Para mim é mais provável obter o número 5 num dado e o número 6 no outro dado porque dificilmente em dois dados saiem o mesmo número em cada um deles.

É mais provável obter números diferentes nos dois dados

[S30, R1] O que é mais provavel é sair numeros diferentes em ambos os dados e principalmente numeros grandes.

[S72, R1] Porque se sairem dois números diferentes em dois dados é mais provável do que sairem dois iguais.

Comparar o número de casos favoráveis

[S11, R1] Porque são mais números, por isso é mais provável obter o nº 5 e o nº 6.

[S69, R1] Caso II. Os dois dados tinham de sair 6. Caso I. Podia sair 5 num dado ou noutro desde que no outro dado saisse um 6. Dobro das possibilidades.

Os números 5 e 6 só existem uma vez em cada dado

[S61, R3] O meu raciocínio foi este: como o número 5 e o número 6 só existem uma vez em cada dado, as probabilidades em ambos os casos são iguais.

[S151, R3] São igualmente prováveis porque só existe um número de cada em cada dado por isso é difícil sair um como outro.

Os números dos dois dados são iguais

[S50, R3] Porque os dados têm os mesmos números, são iguais.

[S187, R3] Sim, porque se temos 2 dados e cada um tem os números {1, 2, 3, 4, 5, 6} qualquer destes pode sair.

Razões causais

[S91, R2] Se nós partirmos da mesma face podemos obter a mesma face virada para cima no mesmo dado.

[S129, R2] Porque os dados quando estam juntos rolam menos. Por isso é mais provável ser ambos 6.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S47, R3] Porque é tudo uma questão de sorte.

[S199, R3] Todos os dados têm um número 6 e um número 5, logo é igualmente provável obter qualquer uma das situações em cima citadas.

Raciocínios dos alunos do 11º ano

É mais difícil obter números iguais nos dois dados

[S92, R1] É mais difícil sairem 2 números iguais. Há poucas probabilidades de num dado sair o nº 6, mas em dois ainda há menos.

[S157, R1] Seria muita sorte, possuirem ambos os dados o n.º 6, então é mais provável possuir o n.º 5 num dado e o n.º 6 em outro dado.

É mais provável obter números diferentes nos dois dados

[S38, R1] Eu considero que é mais provável sairem números diferentes nos dados, do que n.ºs iguais.

[S111, R1] Porque a probabilidade de sair em ambos os dados o numeros 6 é menor do que sair qualquer dos outros numeros, que saiam diferentes em cada dado.

Comparar o número de casos favoráveis

[S1, R1] Porque podemos ter (5, 6) ou (6,5) e o (6,6) só combina uma vez.

[S145, R1] Há maior número de combinações possiveis sendo uma face 5 e outra face 6 pode dar-se 5–6 ou 6–5.

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S97, R1] Pode sair no dado ① o 5 e no dado ② o 6, e também pode sair no dado ① o 6 e no dado ② o 5. A probabilidade de sair num o 5 e no outro o 6 é o dobro da probabilidade de sair 6 nos dois. A probabilidade de sair 12 é 1/36 enquanto a probabilidade de sair 11 é 1/18.

[S131, R1] Casos possiveis 2 e os casos favoraveis são 11 logo temos uma probabilidade de 20% contra as outras que têm probabilidade inferior.

Só há uma hipótese para o 5 e o 6 e uma para os dois 6

[S126, R3] Porque para obter o n.º 5 num dado e o n.º 6 no outro só há uma hipotese, que é sair exactamente o n.º 5 num e o 6 no outro e para obter a igualdade a 6 também só há uma hipotese é sair o 6 nos dois dados.

[S207, R3] Existe o mesmo número de combinações possíveis que se podem obter no primeiro e segundo caso.

Equiprobabilidade de obter qualquer face de um dado

[S60, R3] Se a probabilidade de um n.º do dado é 1/6, de ambos os n.ºs é 1/6×1/6=1/36. E de obter 5 e noutro 6 é igual também a probabilidade de 1/36.

[S77, R3] Em ambos os dados temos 16,(6) de probabilidades de sair qualquer um dos números por isso as duas situações tem a mesma probabilidade de acontecerem.

Equiprobabilidade dos elementos do espaço amostral

[S136, R3] Porque em ambas as situações a probabilidade é de 100%/12.

[S185, R3] É um caso de sorte, a probabilidade de sair o n.º 5 é 1/12 e o n.º 6 é 1/12 o que vai dar 2/12. A probabilidade de sair o n.º 6 é 2/12.

Os números dos dois dados são iguais

[S73, R3] Como o número de pintas é igual nos dois dados pode-se obter qualquer uma das hipoteses referidas.

[S201, R3] É tão provável sair 6 em ambos, ou 5 num e 6 noutro porque os dados são iguais logo têm um mesmo n.º de pintas, em é provavel sair 6 nos dois como 5 num e 6 no outro.

Razões causais

[S54, R3] Como os dados são lançados independentemente, um não exerce qualquer efeito sobre outro, logo, é tão provável que se obtenha diferentes números como se obtenha números iguais, é uma questão do modo como lança o dado.

[S84, R3] Tanto pode sair o n.º 5 e o n.º 6 como o n.º 6 nos dois. Tudo depende da posição que sejam lançados e do numero de voltas que rolarem.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S19, R3] Tanto num dado como no outro pode sair qualquer numero.

[S128, R3] Os dois dados têm o n.º 5 e 6 portanto podem sair os dois 6, dois 5 ou um 6 e outro 6. Assim como à possibilidade de sair outro número qualquer.

Questão 12

Raciocínios dos alunos do 8º ano

É mais difícil obter números iguais nos dois dados

[S49, R1] Pois raramente e só com um pouco de sorte saiem números iguais em ambos os dados.

[S67, R1] Quando eu jogo ao monopólio é mais fácil sair números diferentes do que números iguais, raramente saiem números iguais.

Os números de um dado são diferentes

[S89, R1] É mais provável obter dois números diferentes, pois todas as faces dos dados são diferentes.

[S162, R1] Porque o dado tem números diferentes.

Comparar o número de casos favoráveis

[S62, R1] É mais provável obter números diferentes porque cada um dos dados tem várias faces 6 logo podem-se fazer inúmeras combinações.

[S120, R1] Porque há uma probabilidade maior de sair num lado um numero e no outro cinco numeros diferentes do que 1 igual.

Os números dos dois dados são iguais

[S31, R3] Porque os números dos dois dados são ambos iguais.

[S160, R3] Porque os números são os mesmos e têm as mesmas epóteses de aparacerem iguais ou diferentes.

Razões causais

[S91, R3] Porque ao lançar-mos o dado podemos partir ou não do mesmo nº de pintas.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S141, R3] Qualquer das situações seguintes são prováveis porque quando se lança um dado não sabemos o número que vai sair.

[S177, R3] O raciocínio que utilizei para responder à pergunta foi posso tirar os números diferentes em cada um dos dados, como também posso tirar números iguais em ambos os dados, as duas situações são possíveis.

Raciocínios dos alunos do 11º ano

É mais difícil obter números iguais nos dois dados

[S26, R1] Conseguir que saiam 2 numeros iguais é mais difícil do que sairem dois n.os diferentes. Podemos ver isso claramente num jogo em que meta 2 dados.

[S179, R1] É mais provável que, ao lançar dois dados, os números não coincidam, é mais "difícil" tirar números iguais em ambos os dados do que se tirar números diferentes.

Comparar o número de casos favoráveis

[S14, R1] Se num dado sair um número, no outro pode sair também esse, mas há mais outros cinco que podem sair.

[S151, R1] Nos dois dados existe 1 n.º igual, isto é, existe um número que é comum aos dois. Para um n.º posso obter 1 n.º que seja igual, e 5 números que sejam diferentes. É maior portanto o número de combinações.

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S88, R1] É mais fácil obter numeros diferentes, porque existe mais hipoteses de isso acontecer. De dois n.os iguais em cada dado existe 1/6 de hipoteses e de dois diferentes em cada dado existe 5/6 de hipoteses.

[S137, R1] As probabilidades de sair um n.º igual são de apenas 1/6 porque só há 1 n.º igual em cada dado. Como há 5 n.os diferentes de um que possa ter saído num dos dados as hipóteses de sair diferente são de 5 para 6.

Equiprobabilidade de obter qualquer face de um dado

[S139, R3] Como disse na pergunta 11.2. os dados não estão relacionados, temos de os analisar separadamente. Assim, as possibilidades de sair um 1, 2, 3, 4, 5, 6 num dado são iguais (16,6), assim como no outro. Assim, poderemos obter números iguais ou diferentes nos dados.

[S162, R3] A probabilidade é a mesma porque a probabilidade de um número sair no dado é de 1/6.

Os números dos dois dados são iguais

[S59, R3] Os dois dados são iguais, têm os mesmos números. Logo, é provável obter-se números iguais ou diferentes.

[S144, R3] Ambos os dados têm números iguais, logo a probabilidade é igual.

Razões causais

[S52, R3] A probabilidade não se modifica visto que os dados são lançados em iguais condições.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S21, R3] É uma questão de sorte, a probabilidade é a mesma.

[S100, R3] Tanto se pode obter n.os diferentes, como obter iguais em ambos os dados.

Questão 13

Raciocínios dos alunos do 8º ano

É mais difícil obter faces iguais nas duas moedas

[S156, R2] É mais provável obter a face cara numa moeda e face escudo na outra moeda porque eu penso que é difícil sair em ambas as moedas a mesma face.

[S182, R2] Porque é sempre difícil sair duas vezes a mesma face.

É mais provável obter faces diferentes nas duas moedas

[S86, R2] Acho pouco provável obter face cara em ambas as moedas, mas ainda pode acontecer.

[S204, R2] É mais provável para não obter duas faces iguais. Obtem-se assim numa face cara e noutra escudo.

Cada moeda tem uma face cara e uma face escudo

[S168, R3] O meu raciocínio foi as moedas são iguais.

[S192, R3] As moedas têm as mesmas faces. Tanto pode sair igual como diferente.

Razões causais

[S60, R1] Acho que se forem atiradas da mesma forma, cairão da mesma maneira.

[S188, R1] Porque se se atiram as 2 moedas com a face virada para cima provavelmente ambas as moedas obtem a face cara.

[S108, R3] O raciocínio utilizado foi: quando lançamos as moedas tudo depende da força com que as mandamos, tanto pode sair as duas com a mesma face ou faces diferentes.

[S150, R3] É como o dado a força com que atira a moeda é que conta.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S5, R3] Depende da sorte.

[S48, R3] Porque uma pessoa atira ao ar e não sabe como vai cair pode cair cara numa e coroa noutra ou cara nas duas ou virce verça.

[S112, R3] Ao lançarmos duas moedas ao ar pode sair cara ou escudo sem nós pudermos prever isso, logo ambas são prováveis o que não impede de haver outras probabilidades.

[S177, R3] O raciocínio que utilizei para responder à pergunta foi que se eu atirar duas moedas ao ar de uma só vez posso tirar a face cara em ambas as moedas, como também posso tirar a face cara numa moeda e face escudo na outra, as duas situações são possiveis.

Raciocínios dos alunos do 11º ano

É mais difícil obter faces iguais nas duas moedas

[S18, R2] Porque quando lançamos as duas moedas ao ar, estas normalmente quando caiem não ficam viradas para o mesmo lado.

[S116, R2] Porque é mais "difícil" obtermos a cara em ambas as moedas.

É mais provável obter faces diferentes nas duas moedas

[S38, R2] Acho que é mais provável saírem com lados diferentes do que cara em ambas as moedas. Há três probabilidades: sair cara em ambas, face em ambas e face numa e cara noutra. Neste caso acho que é mais provável a última hipótese.

[S54, R2] As moedas possuem faces diferentes, sair as 2 moedas cara é menos provável que sair faces diferentes.

Comparar o número de casos favoráveis

[S24, R2] Só há uma possibilidade de obter cara em ambas as moedas, enquanto que há duas possibilidades de elas serem diferentes.

[S26, R2] ○→ cara ●→ face escudo

○●	●○	●○	●●
○○	●●	○○	○●

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S89, R2] Nas duas moedas existem 2 caras e 2 escudos logo existem
25% de cara cara
25% de escudo escudo
50% de cara escudo

	Cara	Escudo
cara	cara cara	cara escudo
escudo	cara escudo	escudo escudo

[S168, R2] O n.º de casos prováveis é maior para o segundo caso do que para o primeiro. Enquanto que para o primeiro a probabilidade é de 1/4, para o segundo caso a probabilidade é de 1/2.

Cada moeda tem uma face cara e uma face escudo

[S39, R3] Acho que é provável tanto uma como a outra porque existem duas faces caras e duas faces escudos.

[S178, R3] Se as moedas são iguais há a mesma probabilidade para uma situação e para outra.

Equiprobabilidade de obter qualquer face de uma moeda

[S98, R3] A probabilidade de sair cara sobre 1 moeda deve ser 1/2. Sobre duas $1/2 \times 1/2 = 1/4$ e duas ≠ faz=1/2cara×1/2coroa=1/4.

[S193, R3] A probabilidade de sair cara ou coroa é a mesma.

Equiprobabilidade dos elementos do espaço amostral

[S36, R3] Porque ambas as hipoteses têm as mesmas hipoteses de sair. Existem, neste caso, 3 hipoteses possiveis, $\bigcirc\bigcirc$; $\textcircled{\$}\bigcirc$; $\textcircled{\$}\textcircled{\$}$, e cada uma com a mesma probabilidade de sair. $\bigcirc$ — cara , $\textcircled{\$}$ — escudo.

[S142, R3] São duas moedas e só há três combinações possíveis: cara–cara; cara–escudo; escudo–escudo. Por isso, a probabilidade de aparecer qualquer uma destas combinações é de 1/3 é, portanto, igual.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S15, R3] Ambas são provaveis pois podem-se obter cara ou escudo nas duas moedas.

[S153, R3] A desposição das moedas apos o lançamento é “à sorte” logo as probabilidades são as mesmas para todos os casos.

Questão 14

Raciocínios dos alunos do 8º ano

É mais difícil obter faces iguais nas três moedas

[S58, R2] Eu acho que pode ser assim porque aqui pode dizer-se que é muita sorte obter as 3 faces iguais nas moedas.

[S158, R2] Posso obter faces diferentes em duas das três moedas porque é o que eu penso que é mais certo e provável, porque é dificil obter as moedas todas iguais.

Em duas das três moedas obtém-se a mesma face

[S54, R2] Porque duas delas tem que ser obrigatóriamente iguais, como só existe a cara ou escudo, se um cair cara, outra escudo a outra ou vai ser cara ou escudo.

[S77, R2] Porque neste caso a 3 moedas e a sempre uma que tem de cair com a mesma face porque a moeda só tem duas faces.

Comparar o número de casos favoráveis

[S82, R2] Há três possibilidades para que elas fiquem com faces diferentes e uma possibilidade de sairem iguais, por isso a possibilidade de sairem com faces diferentes é maior.

[S127, R2] Porque em três moedas conseguir fazer sair 3 faces iguais é díficil, mas obter faces diferentes em duas das três moedas é mais fácil já que na primeira há 2 probabilidades em 10 enquanto na segunda há 4 ou 5 em 10.

Cada moeda tem uma face cara e uma face escudo

[S113, R3] Se há 3 faces cara e 3 faces coroa, é igualmente provável obtê-las todas iguais, como 2 iguais e uma diferente.

[S162, R3] Porque as moedas têm faces iguais.

Razões causais

[S2, R1] É mais provável obter a face cara em ambas as moedas porque se ao serem lançadas ao ar estiverem as faces viradas do mesmo lado a uma certa probabilidade.

[S60, R1] Acho que se as três moedas forem atiradas da mesma forma e derem as mesmas voltas cairão da mesma maneira com a mesma face virada para cima.

[S126, R2] É mais provável obter em duas das três moedas faces diferentes porque o número de rotações das moedas podem ser diferentes.

[S194, R2] A mais provável é obter faces diferentes em duas das três moedas. é quase impossível atirar duas moedas da mesma maneira como atirámos a primeira.

[S130, R3] É provável encontrar duas iguais e uma diferente como as três iguais dependendo da força que elas rodam.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S98, R3] Como já disse tanto pode cair as faces iguais nas três moedas como cair faces diferentes em duas das três moedas. a moeda ao ar é um caso de sorte.

[S154, R3] São igualmente prováveis porque tanto pode ficar as faces todas iguais como todas diferentes.

[S12, R3] Já que tem duas faces cara e coroa, tudo é possível, tanto cara ou coroa na 1ª, como na 2ª e também na 3ª.

[S80, R3] Pode sair uma face qualquer.

Raciocínios dos alunos do 11º ano

É mais difícil obter faces iguais nas três moedas

[S68, R2] É mais difícil saír nas três moedas faces iguais. É mais provável saírem faces diferentes do que iguais.

[S176, R2] É preciso ter sorte para sair tudo igual.

Em duas das três moedas obtém-se a mesma face

[S78, R2] Porque se são 3 moedas a probabilidade é de sairem duas iguais e a outra diferente. Nunca poderiam ser as três diferentes. Logo a probabilidade maior é de obter 2 faces iguais e outra diferente.

[S165, R2] Porque a moeda só tem duas faces, por isso, uma das faces que sair tem que ser igual à de uma das outras moedas.

Comparar o número de casos favoráveis

[S21, R2] Na 1ª situação há 2 possibilidades (todas cara ou todas escudo) Na 2ª situação há um maior nº de possibilidades logo na 2ª a probabilidade é maior.

[S186, R2] O raciocínio que utilizei foi que é mais possível sairem duas faces diferentes em duas das três moedas pois o universo de hipóteses é maior.

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S114, R2] O facto de a probabilidade de sair as 3 moedas iguais é de 1 para 3 enquanto que as hipoteses de sairem 3 moedas diferentes é de 2 para 3.

[S169, R2] A probabilidade de ocorrer a primeira situação é de 2/8 enquanto que da segunda é 6/8.

Cada moeda tem uma face cara e uma face escudo

[S144, R3] Existem 3 faces caras e 3 faces escudo. A probabilidade de se obter faces iguais em todas as três moedas é igual à probabilidade de se obter faces diferentes em duas das três moedas.

[S208, R3] Há 3 caras e 3 escudo tanto pode ser uma ou outra em cada moeda.

Equiprobabilidade de obter qualquer face de uma moeda

[S98, R3] Para três moedas = seria 1/2cara×1/2cara×1/2cara=1/8. Para 2≠3 = 1/2cara×1/2cara×1/2coroa=1/8.

[S196, R3] Pois cada moeda tem uma cara e uma coroa, logo tem as mesmas probabilidades tanto de sair uma como outra nas 3 moedas.

Equiprobabilidade dos elementos do espaço amostral

[S36, R3] Na 1.a opção há duas combinações possiveis ○○○; ⓈⓈⓈ. Na 2.a opção existem também 2 opções possiveis: Ⓢ○Ⓢ; ○Ⓢ○; Logo ambas as situações têm as mesmas probabilidades, tendo em conta o número de hipóteses possiveis de combinações. (não levei em consideração a ordem das moedas).

[S128, R3] Podem sair FFF ou EEE ou FEE ou FFE então têm igual probabilidade de sairem. F → face; E → escudo.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S16, R3] Podem cair com as 3 faces viradas para cima ou só uma moeda ficar diferente duas serão iguais e 1 diferente.

[S104, R3] Como são 3 moedas á 6 faces, portanto é possível obter-se faces iguais nas três moedas como é possível obter faces diferentes em duas das três moedas. As duas situações anteriores são prováveis.

A N E X O V

RACIOCÍNIOS

Questionário-experiência de ensino

Neste Anexo apresentam-se exemplos dos raciocínios referidos pelos alunos do 9º ano para justificarem as respostas às perguntas do questionário-experiência de ensino.

Relativamente a cada raciocínio, indica-se, dentro de parêntesis, o número atribuído ao aluno, o momento a que se refere o raciocínio (pré-teste ou pós-teste), o grupo a que pertence o aluno (*exp* ou *contr*) e a resposta que o raciocínio explica. Deve observar-se que as três primeiras questões admitiam quatro respostas possíveis, representadas por R1, R2, R3 e R4, e as restantes questões admitiam três respostas possíveis, representadas por R1, R2 e R3, correspondendo estas ordens às ordens com que as respostas aparecem no questionário.

Acontecimentos quase certos e quase impossíveis: contexto de moedas

Questão 1.a)

Referência à moeda

[S175, pós-teste, contr, R1] Há tantas probabilidades de sair a face cara como coroa. Há 50 % de probabilidades para cada face.

[S121, pré-teste, contr, R2] Como existem duas faces, as probabilidades de obtenção de cada uma são iguais, por isso, é muito provável a obtenção de, pelo menos uma vez a face cara.

[S41, pós-teste, exp, R2] A moeda tem duas faces iguais. A probabilidade de sair a face cara é 1/2 e do escudo é 1/2.

[S167, pós-teste, contr, R3] Porque a probabilidade de sair a face cara é igual à de sair a face escudo.

Referência ao número de lançamentos

[S101, pré-teste, exp, R1] Se em 80 vezes tendo sido a moeda atirada ao ar, não tivessemos obtido uma vez face é porque a moeda tem dupla face, ou está viciada.

[S104, pré-teste, contr, R2] É muito provável, porque em 80 vezes que atiramos a moeda ao ar é provavelmente pelo menos uma vez a face cara, uma ou mais vezes.

[S209, pós-teste, contr, R1]. Eu acho que sai de certeza pois acho que em 80 lançamentos é pouco provável não sair cara.

[S90, pós-teste, exp, R2] Em 80 lançamentos pelo menos uma vez tem que sair a face cara.

Referência ao número de lançamentos e à moeda

[S153, pré-teste, contr, R1] Uma moeda que seja lançada 80 vezes e com duas opções de sair a face da cara e a face escudo de certeza que a face cara sai pelo menos uma vez.

[S61, pré-teste, exp, R2] O raciocínio que utilizei foi que tendo a moeda dois lados iguais, é muito provável, se não for de certeza, que em 80 lançamentos saia pelo menos uma vez cara.

[S21, pós-teste, exp, R1] Como são 80 lançamentos, a probabilidade de obter a face cara ou escudo é a mesma, daí que de certeza que sai pelo menos uma vez a face cara.

[S113, pós-teste, contr, R2] Porque se a moeda tem face cara e face escudo é muito provável que em tantos lançamentos saia pelo menos uma vez face cara.

Não é um acontecimento certo

[S56, pré-teste, exp, R2] Não vou dizer que "de certeza" porque por "azar" pode calhar sempre escudo. Mas também não vou dizer "Pouco Provável" porque é difícil sair sempre escudo, por isso eu respondi que é muito Provável.

[S116, pré-teste, contr, R2] Porque uma moeda tem duas faces, e embora pouco provável pode obter-se sempre a mesma face da moeda.

[S75, pós-teste, exp, R2] É muito provável porque não temos a certeza, não é um acontecimento certo.

Cálculo da probabilidade

[S102, pós-teste, contr, R3] P(c)=1/80=0,0125.

[S189, pós-teste, contr, R2] p=79/80=0,987 ou 98,7%.

Interpretação errada do enunciado

[S73, pré-teste, exp, R3] Eu acho que a moeda quando se atira pelo menos 5 vezes acho que sai sempre mais do que uma vez a face cara e a face escudo. Eu acho que é pouco provável sair só uma vez face cara, mas não é impossível.

[S120, pré-teste, contr, R4] Porque atirar tantas vezes (80) uma moeda é impossível que se obtenha apenas uma vez a face cara.

[S142, pós-teste, contr, R3] Acho que é pouco provável pois em 80 lançamentos e muito provavel sair a face cara mais de uma vez.

Razões causais

[S62, pré-teste, exp, R2] Porque quando se atira a moeda virada com a face cara é quando sempre que sai a face escudo.

[S195, pré-teste, contr, R2] Eu penso que é muito provável porque a moeda nunca é lançada com a mesma força e também nunca roda o mesmo numero de vezes no ar.

[S64, pós-teste, exp, R1] Pois de certeza sai a face cara, dependerá muito de como a lançarmos a moeda.

Questão 1.b)

Referência à moeda

[S172, pré-teste, contr, R2] porque, na moeda, calha às vezes face cara e outras vezes o escudo portanto é muito provável calhar 40 vezes.

[S10, pós-teste, exp, R2] Pois existe 1/2 de probabilidade de sair cada uma das faces.

[S145, pós-teste, contr, R3] Porque há as mesmas possibilidades de sair a face cara ou coroa.

Referência ao número exacto de resultados

[S40, pré-teste, exp, R3] Porque é um número muito exacto e no mundo das probabilidades acho que é pouco provável que isso aconteça.

[S156, pré-teste, contr, R4] Porque de 80 lançamentos não deve sair metade cara e a outra metade escudo.

[S136, pós-teste, contr, R3] São muitos lançamentos por isso é pouco provavel $\bar{q}$ seja exactamente metade.

Referência ao número de lançamentos e à moeda

[S96, pré-teste, exp, R2] Em 80 lançamentos, tudo pode acontecer, pelo que é muito provável, em metade desses lançamentos, sair uma face e na outra metade, outra face.

[S207, pós-teste, contr, R1] Porque já é 80 lançamentos já é mais provável sair 40 caras e 40 fases.

[S180, pós-teste, contr, R2] Porque pode sair 40 vezes, que é o valor equivalente a 50% de probabilidade.

[S29, pós-teste, exp, R3] Pois porque temos 2 faces para cada lançamento é pouco provável que se obetenha exactamente 40 vezes a face cara.

Não é um acontecimento certo

[S49, pós-teste, exp, R2] É muito provável sair 40 vezes a face cara porque não se tem a certeza que sai exactamente 40 vezes.

Não é um acontecimento impossível.

[S205, pré-teste, contr, R3] Porque eu acho ser muito dificil sair exactamente igual o nº de face cara como a face escudo apesar de não ser impossivel.

[S9, pós-teste, exp, R3] Acho que é pouco provável pois é difícil e imprevisível saírem 40 vezes a mesma face, sendo no entanto provável, não é impossível de acontecer.

Cálculo da probabilidade

[S26, pós-teste, exp, R2] P(40 face cara) =40/80= 50%.

[S157, pós-teste, contr, R3] p(fc)=40/80=0,5=50%; p(fe)=40/80=0,5=50%.

Razões causais

[S35, pré-teste, exp, R2] Porque se atirar a moeda ao ar exactamente da mesma maneira dá a sensação que a moeda ficou "viciada" e daí pode perfeitamente ter saído 40 vezes a face cara.

[S133, pré-teste, contr, R3] Para se obter exactamente 40 vezes a face cara era necessário muita precisão ao lançar a moeda ao ar.

[S120, pré-teste, contr, R4] É impossível porque só se obtém 40 vezes se estiver a contar direitinho e a atirar a moeda de propósito para calhar 40 vezes na face cara.

[S21, pós-teste, exp, R3] Apesar da probabilidade ser a mesma (obter a face cara ou escudo) é pouco provável que isso aconteça pois nunca mandamos a moeda da mesma maneira.

Questão 1.c)

Referência à moeda

[S10, pré-teste, exp, R3] É pouco provável pois as faces têm a mesma probabilidade de sair.

[S145, pré-teste, contr, R4] Porque para obter sempre a face cara é preciso não obter a face escudo e isso é muito difícil pois a moeda tem apenas duas faces.

[S18, pós-teste, exp, R2] porque a face escudo é simétrica à face cara.

[S134, pós-teste, contr, R3] É pouco provável pois, realmente existem só 2 hipoteses, o que não quer dizer que saia exactamente 40 vezes a cara.

[S53, pós-teste, exp, R4] Porque na moeda também existe a face escudo.

Referência ao número de lançamentos

[S203, pré-teste, contr, R3] Porque em 80 lançamentos é pouco provável que nunca saia a outra face.

[S5, pré-teste, exp, R4] Penso que é impossível, porque não é possível sair sempre a face cara. Acho que ao lançar-mos 80 vezes a mesma moeda, é muito difícil obter-mos sempre a face cara. Visto que são muitos lançamentos, penso que também sai pelo menos 1 moeda do outro lado.

[S96, pós-teste, exp, R3] É muito pouco provável. Em 80 lançamentos, é muito dificil que saia sempre a mesma face.

[S177, pós-teste, contr, R4] Porque são muitos lançamentos, e nesses lançamentos obter-se sempre a mesma face, acho que é impossível.

Referência ao número de lançamentos e à moeda

[S160, pré-teste, contr, R3] Porque a partida partem as duas em condição de igualdade e como são muitos lançamentos é pouco provável calhar sempre a face cara.

[S21, pré-teste, exp, R4] Já que se lança a moeda 80 vezes, num desses lançamentos tem que saír a face escudo, nem que seja uma vez, pois a probabilidade de sair cara ou escudo é a mesma.

[S46, pós-teste, exp, R3] É pouco provável porque são muitos lançamentos e a probabilidade de sair cara é a mesma de sair coroa.

[S208, pós-teste, contr, R4] Se só há duas faces é quase impossível em 80 lançamentos obter a mesma face.

Não é um acontecimento certo

[S17, pós-teste, exp, R3] Não é certo que saia sempre a face cara, é provável mas não é certo.

Não é um acontecimento impossível

[S190, pré-teste, contr, R3] Não se pode dizer que é impossível calhar sempre a mesma face mas é provável que saia pelo menos uma vez a outra face.

[S8, pós-teste, exp, R3] É pouco provável, porque pelo menos 1 vez tem que sair a face escudo, mas pode acontecer.

Cálculo da probabilidade

[S159, pós-teste, contr, R1] $P(c)=80/80 \Leftrightarrow P(c)=1$.

[S150, pós-teste, contr, R3] $P=1/80=1\%$.

Razões causais

[S197, pré-teste, contr, R3] Eu acho que é pouco provável que a moeda desse sempre as mesmas voltas no ar.

[S69, pré-teste, exp, R4] É impossível porque as moedas são sempre atiradas de maneiras diferentes.

Probabilidade em experiências simples: contexto de urnas

Questão 2.a)

Comparar o número total de bolas

[S111, pré-teste, contr, R1] É mais provável tirar a bola preta do saco I porque tem menos bolas o que aumenta a probabilidade.

[S43, pós-teste, exp, R1] É mais fácil tirar a bola preta do saco I porque só tem 4 bolas e no saco II tem 5.

Comparar o número de bolas brancas

[S94, pré-teste, exp, R1] Porque o saco I tem menos bolas brancas que o saco II.

[S120, pós-teste, contr, R1] É mais provável sair uma bola preta no saco I, pois existem menos bolas brancas do que no saco II.

Comparar o número de bolas pretas

[S188, pré-teste, contr, R3] É igualmente provável tirar uma bola preta de qualquer dos sacos I e II, porque ambos têm 2 bolas pretas.

[S27, pós-teste, exp, R3] Porque o nº de bolas pretas està em igual nº nos dois sacos.

Comparar o número de bolas brancas e pretas

[S80, pré-teste, exp, R1] O saco I tem menos bolas que o saco II mas o nº de pretas é iguais. No saco I há 2 bolas brancas e no II há 3 bolas, por isso são menores as chances de sair bola branca no saco I.

[S178, pré-teste, contr, R1] Porque no saco 1 são duas brancas e duas pretas. E no saco dois já são tres brancas e duas pretas e tem-se mais possibilidade de tirar mais depressa no saco I que no saco II que á mais brancas que pretas.

[S91, pós-teste, exp, R1] É mais provável tirar uma bola preta do saco um (I) porque as bolas estão em números iguais e no saco II as brancas estão em maior quantidade.

[S198, pós-teste, contr, R1] Eu acho mais provável tirar uma bola preta do saco I porque como são duas bolas pretas em ambos os sacos só que no I tem duas bolas brancas e no II três bolas brancas, portanto é mais provável tirar do saco I devido ao menor número de bolas brancas.

Proporção do número de bolas

[S35, pós-teste, exp, R1] Porque a probabilidade no saco I é uma bola branca para cada preta e no saco II isso não se verifica pois existe uma bola branca a mais.

[S93, pós-teste, exp, R1] Porque no saco I para cada bola preta há uma branca, no saco II para cada bola preta há uma bola e meia branca.

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S28, pré-teste, exp, R1] No saco I há 50% de hipóteses de tirar 1 bola preta, pois o nº de bolas brancas é igual ao número de bolas pretas, enquanto no saco II essa hipótese é menor, pois há mais bolas brancas que pretas.

[S71, pós-teste, exp, R1] Enquanto que no saco II as probabilidades de obter uma bola preta são 2/5 no saco I são de 2/4 ou seja 1/2.

[S119, pós-teste, contr, R1] p(saco I)=2/4   p(saco II)=2/5.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S97, pré-teste, exp, R3] Porque cada saco tem bolas pretas.

[S165, pré-teste, contr, R3] É igualmente provável pois os sacos I e II tem bolas pretas.

Questão 2.b)

Comparar o número total de bolas

[S74, pré-teste, exp, R1] Eu acho que é no saco I, porque no saco II há mais bolas então há mais onde escolher por isso eu acho mais provável que saia no saco I.

[S146, pré-teste, contr, R1] O raciocínio que utilizei foi o seguinte: como no saco I há apenas 3 bolas é mais fácil tirar a bola preta do que no saco II pois neste existem 5 bolas.

[S48, pós-teste, exp, R2] Porque o saco II tem maior quantidade de bolas.

[S139, pós-teste, contr, R1] $\overline{\text{Pq}}$ tem menos bolas do $\bar{\text{q}}$ o saco II.

Comparar o número de bolas brancas

[S19, pré-teste, exp, R1] Porque é o que tem menos bolas brancas, existindo maior possibilidade de sair bola preta.

[S124, pós-teste, contr, R1] Porque ha menos bolas brancas por isso é mais facil tirar uma bola preta. Por isso a 1ª hipotesse, a do saco I é a mais provavel de sair.

Comparar o número de bolas pretas

[S139, pré-teste, contr, R2] Porque tem mais bolas pretas do que o saco I.

[S24, pós-teste, exp, R2] É mais provavel tirar uma bola preta no saco II porque tem duas bolas pretas enquanto que no saco I só tem uma bola preta.

Comparar o número de bolas brancas e pretas

[S46, pré-teste, exp, R3] Porque no saco II apenas existe mais 1 bola preta e mais 1 bola branca então as possibilidades são as mesmas.

[S173, pré-teste, contr, R3] Porque ambos os sacos tem mais bolas pretas do que brancas.

[S165, pós-teste, contr, R3] Apesar do saco II ter mais bolas pretas mas tambem tem mais bolas brancas por isso é igualmente a probabilidade de sair a bola preta.

[S78, pós-teste, exp, R3] Pois tanto no saco I como no saco II há sempre mais uma bola branca do que preta.

Proporção do número de bolas

[S32, pré-teste, exp, R2] Porque no saco I tem uma bola preta para duas brancas e no saco II tem uma bola preta para 1,5 bolas brancas.

[S200, pré-teste, contr, R2] Respondi assim porque no saco I, a cada bola preta correspondem 2 brancas e no saco II a cada bola preta correspondem 1,5 bola branca.

[S96, pós-teste, exp, R2] No saco I há uma bola preta para cada 2 bolas brancas e no II há 1,5 bola branca para cada bola preta.

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S6, pré-teste, exp, R2] No saco II há 40% de hipóteses, enquanto no saco I há menos (33,3% aproximadamente).

[S29, pós-teste, exp, R2] Pois no saco I temos a probabilidade de 1/3 para tirar a bola preta, mas no saco II temos a probabilidade de 2/5.

[S180, pós-teste, contr, R2] Porque existe maior probabilidade de sair bola preta do 2º saco. (p(I)=1/3=0,3   p(II)=2/5=0,4)

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S13, pré-teste, exp, R3] Porque em cada um dos sacos há bolas pretas e tanto faz tirar uma bola preta de qualquer dos sacos.

[S106, pré-teste, contr, R3] Tem nos dois sacos uma bola preta.

Questão 2.c)

Comparar o número total de bolas

[S162, pré-teste, contr, R1] Porque quantas menos forem as bolas melhor é para tirar, porque se tivemos 3 epoteses no saco I é mais provavel.

[S139, pós-teste, contr, R2] Tem muitas $\oplus$ bolas do $\bar{q}$ o saco I.

Comparar o número de bolas brancas

[S40, pré-teste, exp, R1] Apenas há uma bola branca logo é mais provável tirar uma das 2 bolas pretas que o saco contêm.

[S195, pós-teste, contr, R1] Porque contem menor numero de bolas brancas.

Comparar o número de bolas pretas

[S185, pré-teste, contr, R2] Porque o saco II tem mais bolas pretas relativamente ao saco I.

[S101, pós-teste, exp, R2] No saco II á muito mais bolas pretas que no saco I.

Comparar o número de bolas brancas e pretas

[S2, pré-teste, exp, R2] Ao eliminar preta com branca no saco I era uma preta que ficava no saco II ficavam 2 pretas por isso a possibilidade é maior no saco II.

[S202, pré-teste, contr, R3] Porque as bolas pretas são mais que as brancas em ambos os sacos.

[S66, pós-teste, exp, R2] Porque no saco II aumenta 1 bola branca, mas também aumentam 2 bolas pretas.

[S153, pós-teste, contr, R3] No saco II apesar de termos um grande número de bolas pretas em relação ao saco I também o saco II tem maior número de bolas brancas.

Proporção do número de bolas

[S41, pré-teste, exp, R3] O saco II tem o dobro do nº de bolas brancas e o dobro do nº de bolas pretas.

[S110, pré-teste, contr, R3] Tanto no saco I como no II o nº de bolas pretas é o dobro que as bolas brancas.

[S95, pós-teste, exp, R3] É qualquer um dos sacos porque para cada bola branca á duas bolas pretas.

[S117, pós-teste, contr, R3] No saco I há metade das bolas brancas e pretas que há no saco II.

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S25, pré-teste, exp, R3] Porque no saco 1 tem 2 bolas pretas em 3 bolas (2/3) e no saco 2 tem 4 bolas pretas em 6 bolas (4/6) (2/3=4/6).

[S61, pós-teste, exp, R3] Saco I – 2/3=0,(6) Saco II – 4/6=0,(6). Porque há igual probabilidade em ambos os casos.

[S163, pós-teste, contr, R3] Saco I p(preta)=2/3=0,666... Saco II p(preta)=4/6= =0,666.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S31, pré-teste, exp, R3] É igualmente provavel pos no saco I so temos 1 branca e 2 pretas, tanto pode sair branco como preto, lá por no saco II ter mais pretas, pode calhar uma bola branca.

[S165, pré-teste, contr, R3] Pois os dois sacos tem bolas pretas.

Probabilidade em experiências simples: contexto de roletas

Questão 3.a)

Não considerar a conjunção

[S143, pós-teste, contr, R1] p(sair numero maior que 4)=8/4=50%. Obter um numero maior que 4 e mais probavel porque casos possiveis – 8, casos favoraveis – 4 (5, 6, 7, 8) a probabilidade é de 50%.

Comparar o número de casos favoráveis

[S4, pré-teste, exp, R1] Porque há 4 números que são maiores que 4 e há apenas 2 números maiores que 4 e menores que 7 e por isso a probabilidade de sair um número maior que 4 é maior.

[S131, pré-teste, contr, R1] Porque é mais facil sair um nº maior que quatro do que sair um nº maior do que 4 e menor que 7 pois hà mais numeros para sair.

[S23, pós-teste, exp, R1] É mais provável obter um nº maior do que 4 pois os casos favoráveis são 4 (5, 6, 7, 8), enquanto que se obter um nº maior do que 4 e menor do que 7 os casos favoráveis são 2 (5 e 6).

[S133, pós-teste, contr, R1] É mais provável "obter" um nº maior do que 4 pois há mais números (5, 6, 7, 8), pois ao obter um número maior do que 4 e menor do 7 são menos números (5, 6) e a probabilidade é menor.

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S6, pré-teste, exp, R1] Para obter 1 nº > que 4 há 50% de probabilidades, mas para obter 1 nº > que 4 e < que 7 só há 25%.

[S86, pós-teste, exp, R1] (A probabilidade de obter um) p(obter um nº maior do que 4)=4/8=0,5; p(obter um nº maior do que 4 e menor do que 7)=2/8=0,25.

[S203, pós-teste, contr, R1] Eu penso que é mais provável obter um nº maior que 4 porque temos a probabilidade de 4/8 com a probabilidade de 2/8.

Razões causais

[S88, pré-teste, exp, R3] Porque depende da força com que se faz girar a roleta.

[S102, pré-teste, contr, R2] Porque se fizermos rodar a seta com uma força normal talvez com um provablidade de calhar um numero maior que 4 e menor que 7.

[S170, pós-teste, contr, R3] Porque na roleta pode sair qualquer numero, depende da força do lançamento.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S107, pré-teste, contr, R3] Porque pode calhar qualquer número, não se sabe ao certo qual o número que vai calhar.

[S55, pós-teste, exp, R3] Qualquer dos dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis pois não se pode ter a certeza de nenhum dos acontecimentos.

[S182, pós-teste, contr, R3] Porque os dois acontecimentos são possíveis.

Questão 3.b)

Substituição do ou *pelo* e

[S54, pré-teste, exp, R1] Porque só há 2 n.^{os} impares menores que 5, enquanto que menores que 5 há 5 n.^{os}.

[S117, pré-teste, contr, R1] Porque menor do $\bar{q}$ 5 estão 4 n.^{os} (4, 3, 2, 1) e menor $\bar{q}$ 5 e impar só há 2 (1, 3). Por isso as probabilidades de obter um nº menor $\bar{q}$ 5 são maiores.

[S98, pós-teste, exp, R1] Porque há 4 numeros 4, 3, 2, 1. Se obter um nº menor que 5 impar so há 2 n.^{os} 1 e 3.

[S154, pós-teste, contr, R1] p(–5)=4/8=0,5; p(– 5 impar)=2/8=0,25.

Multiplicação de probabilidades

[S9, pós-teste, exp, R1] p(nº menor 5)=4/8=1/2; p(nº menor $\bar{q}$ 5/ímpar)=4/8×2/8= =8/8=1/64.

Não considerar a disjunção

[S61, pré-teste, exp, R3] Porque para sair um numero menor do que 5 tinhamos 4 numeros (1, 2, 3, 4). Para sair os numeros ímpares tinha-mos igualmente 4 probabilidades (1, 3, 5, 7).

[S103, pré-teste, contr, R3] Os dois acontecimentos são igualmente prováveis porque há tantos numeros menores do que 5 como numeros ímpares.

[S107, pós-teste, contr, R1] A probabilidade de sair um número menor do que 5 é 4/8=1/2.

[S114, pós-teste, contr, R1] Porque temos 4 n.^{os} menores que 5 por isso é mais provável que saia um nº menor que 5.

[S82, pós-teste, exp, R3] Pois os números menores que 5 (4, 3, 2, 1) são iguais aos números ímpares pois também são 4 (1, 3, 5, 7).

Referência à disjunção

[S44, pré-teste, exp, R2] Há mais n.^{os} ímpares e menores que 5.

[S114, pré-teste, contr, R2] Penso que obter um nº menor que 5 ou impar porque tem mais hipoteses de escolha tanto pode calhar – de 5 como um nº impar.

[S79, pós-teste, exp, R2] números maiores do que 5 existe 4 nº (1; 2; 3; 4) e números ímpares existe 4 (nº 1; 3; 5; 7). p(nº menor do que 5) =1/2 p(nº ímpar) = 1/2+1/2=2/4.

[S205, pós-teste, contr, R2] Porque no primeiro só ha o menor que 5 e no 2º ha os menores que 5 e os ímpares.

Comparar o número de casos favoráveis

[S33, pré-teste, exp, R2] Porque na 2ª hipótese consideram-se 5 n^{os}, enquanto que na 1ª consideram-se apenas 4 n^{os}. Ora é mais provável a 2ª hipótese. Mais quantidade, mais hipóteses.

[S137, pré-teste, contr, R2] Pois os dois têm os números menores do que cinco e por isso a 2ª hipotese é mais provável pois ainda temos os n.^{os} impares maiores de 5.

[S42, pós-teste, exp, R2] Porque um nº menor que 5 ou impar eu tenho 6 hipoteses que são 7, 5, 4, 3, 2 e 1 e sendo só menores que 5 tenho 4 hipoteses que são 4, 3, 2 e 1.

[S190, pós-teste, contr, R2] No acontecimento que escolhi têm-se mais probabilidade visto que se refere aos n.os 4, 3, 2, 1, 5, 7 enquanto que o outro refere-se aos n.os 4, 3, 2, 1.

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S6, pré-teste, exp, R2] Se o nº puder ser < que 5 como ímpar, há 75% de probabilidades que saia; se só puder ser < que 5, só há 50%.

[S88, pós-teste, exp, R2] Pois a probabilidade é maior (4/8, 6/8).

[S123, pós-teste, contr, R2] p(menor que 5)=4/8=50%; p(menor que 5 ou ímpar)= =6/8=75%.

Razões causais

[S38, pré-teste, exp, R3] O mesmo raciocínio anterior. O resultado está dependente da força, logo os 2 acontecimentos sejam igualmente prováveis.

[S155, pré-teste, contr, R3] O raciocinio é que se a roleta for rodada com força o numero tanto pode ser menor do que cinco ou impar.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S100, pré-teste, exp, R3] Porque há numeros de 1 a 8 e pode sair qualquer numero.

[S100, pós-teste, exp, R3] Porque os numeros são de 1 a 8 tanto pode sair um como outro.

[S109, pós-teste, contr, R3] Porque todos os acontecimentos são possíveis de sair.

Questão 3.c)

Substituição do ou *pelo* e

[S60, pré-teste, exp, R1] É mais provável obter um número não par do que um número menor do que 3 e ainda ímpar.

[S158, pré-teste, contr, R1] Para os impares, temos: 1, 3, 5 e 7.
“ “ “, menores que 3, apenas temos o número 1. Há mais probabilidades na alternativa que marquei.

[S35, pós-teste, exp, R1] Porque há 4 números que não são pares, e um número menor que 3 e não par só há 1.

[S166, pós-teste, contr, R1] Porque existe mais números impares (7 – 5 – 3 – 1) do que n.os menor que 3 ou não par (1).

Multiplicação de probabilidades

[S85, pós-teste, exp, R1] p(não par)=4/8=1/2 ← maior; p(menor que 3 ou não par)= =2/8×4/8=8/64=1/8.

Não considerar a disjunção

[S33, pré-teste, exp, R1] Na 1ª hipótese consideram-se 4 n.os, na 2ª apenas 2.

[S103, pré-teste, contr, R1] Existem na roleta mais numeros não pares do que numeros menores do que 3.

[S72, pós-teste, exp, R1] Há 4 n.os não pares ou seja ímpares e há somente 2 n.os menores que 3.

[S107, pós-teste, contr, R1] A probabilidade de sair um número não par é 4/8=1/2.

Referência à disjunção

[S61, pré-teste, exp, R2] Porque na segunda opção podia sair qualquer número mais pequeno que 3 e ainda os numeros pares.

[S105, pré-teste, contr, R2] É mais provável obter um número menor que 3 ou não par porque há quatro números ímpares e dois menores que 3.

[S68, pós-teste, exp, R2] Porque menor que 3 há 2 e não par hé 4 então ao todo são 6.

[S205, pós-teste, contr, R2] Porque no primeiro há os impares no segundo há os impares e os números menores que 3.

Comparar o número de casos favoráveis

[S28, pré-teste, exp, R2] Tal como na resposta anterior, os números abrangidos por esta condição (5 números – 1, 2, 3, 5, 7) são em maior número que os números abrangidos pela 1ª condição (4 números – 1, 3, 5, 7).

[S198, pré-teste, contr, R2] Eu acho que obter um número menor do que 3 ou não par é mais provável porque há mais hipóteses (sigo exactamente o raciocínio da alínea anterior).

[S39, pós-teste, exp, R2] Pois as probabilidades são mais, no 1º só há 4 acontecimentos possíveis (1; 3; 5; 7) e no 2º há 5 (1; 2; 3; 5; 7).

[S169, pós-teste, contr, R2] Porque há mais probabilidade (3, 2, 1, 5, 7) do que obter um número não par (3, 1, 5, 7).

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S6, pré-teste, exp, R2] Se a condição tanto puder ser «< que 3» ou «não par», as hipóteses correctas são 5 e a probabilidade de 62,5%; se só puder ser «não par» as hipóteses correctas são só 4 e a probabilidade de 50%.

[S45, pós-teste, exp, R2] p(não par)=4/8=1/2; p(menor do que 3 ou não par)= =4/8+1/8=5/8.

[S152, pós-teste, contr, R2] p(~p)=4/8=50%; p(<3; ~p)=5/8=62,5%. A probabilidade é maior de obter um nº menor que 3 ou não par (62,5%).

Razões causais

[S78, pré-teste, exp, R3] Pois pode sair qualquer dos números porque a roleta anda conforme a força que se lhe aplica.

[S102, pré-teste, contr, R1] Porque depende da força com que for rodada.

[S126, pré-teste, contr, R3] Acho que os 2 acontecimentos são igualmente prováveis, pelas razões que apresentei anteriormente. Depende de muita coisa, do local onde parou o ponteiro, da força com que se roda a seta, ...

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S95, pré-teste, exp, R3] Porque pode sair um numero qualquer.

[S12, pós-teste, exp, R3] Como a roleta está dividida em 8 partes, tudo pode acontecer, sair um dos acontecimentos como pode até nem sair.

[S140, pós-teste, contr, R3] Pode-se obter um nº ímpar e menor que 3 ou ímpar maior que 3. Estes acontecimentos podem também ser possíveis.

Probabilidade em experiências compostas: contexto de urnas

Questão 4.a)

Comparar o número de bolas brancas e pretas

[S66, pré-teste, exp, R1] Porque tem mais quantidade de bolas pretas.

[S144, pré-teste, contr, R3] Acho que os dois acontecimentos são igualmente prováveis pois a quantidade de bolas brancas e pretas não é muito diferente.

[S27, pós-teste, exp, R2] Como a diferença entre as bolas pretas e as bolas brancas não é muita é mais provável sair uma bola de cada cor.

[S177, pós-teste, contr, R1] Porque existem mais bolas pretas do que brancas, logo é mais provável que se obtenha duas bolas pretas.

Comparar o número de casos favoráveis

[S38, pós-teste, exp, R2] 3, 6. É mais provável obter uma bola branca e uma bola preta, há mais probabilidades em obter as respectivas bolas (6).

[S54, pós-teste, exp, R2]

	○	○	●	●	●
○	○○	○○	○●	○●	○●
○	○○	○○	○●	○●	○●
●	●○	●○	●●	●●	●●
●	●○	●○	●●	●●	●●
●	●○	●○	●●	●●	●●

Obter uma bola branca e uma bola preta têm maior probabilidade de obter. B, P $\rightarrow$12; 2P $\rightarrow$ 9.

[S179, pós-teste, contr, R2] 3, 6.

BB BP PP PP
BP BP PP
BP BP
BP

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S6, pré-teste, exp, R2] Há 10 combinações possíveis, das quais 1 é de 2 brancas (prob. $\rightarrow$ 10%), 6 de 1 branca / 1 preta (prob. $\rightarrow$ 60%) e 3 de 2 pretas (prob. $\rightarrow$ 30%).

[S9, pós-teste, exp, R1] p(2 brancas)=3/5×3/5=9/25; p(1 branca e 1 preta)= =2/5×3/5=6/25.

[S64, pós-teste, exp, R1] p(duas bolas pretas)=3/5=0,6; p(1 bola branca e 1 bola preta)= =3/5×2/5=6/25=0,24.

[S80, pós-teste, exp, R2]

	B	B	P	P	P
B	×	BB	BP	BP	BP
B	BB	×	BP	BP	BP
P	PB	PB	×	PP	PP
P	PB	PB	PP	×	PP
P	PB	PB	PP	PP	×

p(duas pretas)=6/20=3/10; p(branca e preta)=12/20=6/10=3/5; 3/5>3/10.

[S105, pós-teste, contr, R2]

	B	B	P	P	P
B	BB	BB	BP	BP	BP
B	BB	BB	BP	BP	BP
P	PB	PB	PP	PP	PP
P	PB	PB	PP	PP	PP
P	PB	PB	PP	PP	PP

A probabilidade de sair duas bolas pretas é 9/25 e de sair uma de cada cor é 12/25, ou seja, é mais provável obter uma de cada cor.

[S14, pós-teste, exp, R3] p(obter 2 bolas pretas)=3/5=0,6; p(obter 1 bola branca e 1 bola preta)=2/5×3/4×2=12/20=0,6.

[S181, pós-teste, contr, R3] 1–prob.=3/5×2/4=6/20; 2–prob.=2/5×3/4=6/20.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S43, pré-teste, exp, R3] Eu acho que os dois acontecimentos são prováveis porque o facto de haber mais bolas pretas não impede que saia branca.

[S182, pré-teste, contr, R3] Porque tanto se pode obter duas bolas pretas como obter uma bola branca e uma bola preta.

[S183, pós-teste, contr, R3] Porque tanto pode sair uma bola preta e outra branca como duas bolas pretas.

Questão 4.b)

Comparar o número de bolas brancas e pretas

[S71, pré-teste, exp, R2] O número de bolas pretas e brancas é igual então as provabilidades de tirar uma bola de cada cor são maiores.

[S181, pré-teste, contr, R3] Porque estão em igual nº, as bolas brancas e as pretas, são prováveis os dois acontecimentos.

[S34, pós-teste, exp, R3] Os dois acontecimentos são igualmente prováveis pois o nº de bolas brancas e o nº de bolas pretas são o mesmo.

[S137, pós-teste, contr, R2] Pois ambas as cores estão representadas em três bolas, isso faz com que seja provável tirar uma de cada cor.

Comparar o número de casos favoráveis

[S50, pós-teste, exp, R2] Porque na 1ª opção há 9 possibilidades de isso acontecer e na 2ª opção há 18 possibilidades de isso acontecer.

[S179, pós-teste, contr, R2] 3, 9.

BB BB BP PP PP
BB BP BP PP
BP BP BP
BP BP
BP

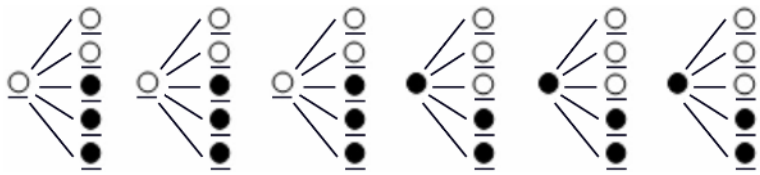
Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S6, pré-teste, exp, R2] Há 15 comb. possíveis (3 de 2 bolas brancas, 3 de 2 pretas e 9 de 1 branca e 1 preta). As probabilidades são de 60% que seja uma de cada e só 20% que sejam 2 brancas e outros 20% que sejam 2 pretas.

[S74, pós-teste, exp, R1] P(2 bolas brancas)=3/6=0,5; P(1 bola branca e 1 bola preta)= 3/6×3/6=9/36=0,25.

[S22, pós-teste, exp, R2] Obter 2 brancas=3/6=0,5; Obter 1 branca e 1 preta= =3/6×3/5×2=0,6.

[S33, pós-teste, exp, R2]



p(obter duas bolas brancas)=6/30=1/5; p(obter uma branca e uma preta)=18/30=6/10=3/5.

[S85, pós-teste, exp, R3] p(2 bolas brancas)=3/6×3/6=9/36; p(1 bola branca 1 b. preta)= 3/6×3/6=9/36.

[S129, pós-teste, contr, R2]

B1 B2 B3 P1 P2 P3

B1B2 B2B3 B3P1 P1P2 P2P3
B1B3 B2P1 B3P2 P1P3
B1P1 B2P2 B3P3
B1P2 B2P3
B1P3

p(BB)=3/15=20%; p(BP)=9/15=60%.

[S158, pós-teste, contr, R2]

	B	B	B	P	P	P
B	BB	BB	BB	BP	BP	BP
B	BB	BB	BB	BP	BP	BP
B	BB	BB	BB	BP	BP	BP
P	PB	PB	PB	PP	PP	PP
P	PB	PB	PB	PP	PP	PP
P	PB	PB	PB	PP	PP	PP

p(B, B)=9/36=1/4; p(B, P)=18/36=1/2.

[S200, pós-teste, contr, R2] I=3/6×2/5=6/30; II=3/6×3/5=9/30.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S24, pré-teste, exp, R3] Porque tanto pode tirar duas bolas pretas, como tirar uma branca e uma preta.

[S109, pré-teste, contr, R3] Penso que é provável sair qualquer bola do saco, pois elas estão todas misturadas.

Questão 4.c)

Comparar o número de bolas brancas e pretas

[S89, pré-teste, exp, R1] Porque tem mais bolas brancas do que pretas é mais provável sair duas bolas brancas.

[S149, pré-teste, contr, R1] Porque tem muito mais bolas brancas do que bolas pretas.

[S7, pós-teste, exp, R1] Porque tem muitas mais bolas brancas do que pretas.

[S173, pós-teste, contr, R1] Porque o saco têm em maior número as bolas brancas.

Comparar o número de casos favoráveis

[S6, pós-teste, exp, R3] Há 10 combinações possíveis para cada 1 dos casos.

[S179, pós-teste, contr, R3] 10, 10.

BB BB BB BB BP PP
BB BB BB BP BP
BB BB BP BP
BB BP BP
BP BP
BP

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S6, pré-teste, exp, R3] Há 21 combinações possíveis: 10 de 2 bolas brancas, 10 de 1 de cada e 1 de 2 pretas); logo se desprezarmos a hipótese, obviamente improvável de sairem 2 pretas, para facilitar os cálculos, há 50% de probabilidades que saiam 2 brancas e 50% que saia 1 de cada.

[S3, pós-teste, exp, R1] p(duas brancas)=5/7×4/6=20/42; P(branca e preta)=5/7×2/6= =10/42.

[S48, pós-teste, exp, R1] p=(duas bolas brancas)=5/7≅0,7; p=(uma bola branca e 1 preta)=5/7×2/6×2=20/42≅0,5.

[S189, pós-teste, contr, R1] 2B P=5/7×4/7=20/49≅0,408 ou 40,8%; 1P+1B P=5/7×2/7= 10/49≅0,204 ou 20,4%.

[S122, pós-teste, contr, R3] p(b, b)=10/21=47,6%; p(b, p)=10/21=47,6%.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S31, pré-teste, exp, R3] Depende da sorte de cada um tanto pode sair 2 brancas, 1 branca e 1 preta, ou as duas pretas.

[S140, pré-teste, contr, R3] Pode ser mais provável obter duas bolas brancas relativamente ao nº de bolas. Mas pode sair uma bola preta. Pode-se ter sorte e sair uma bola preta. Tudo é possível.

Probabilidade em experiências compostas: contexto de dados

Questão 5.a)

Comparar as duas somas

[S86, pré-teste, exp, R2] Pois na soma 6 os resultados para ganhar eram muito mais fáceis pois a soma 6 é mais elevada que a soma 3.

[S209, pré-teste, contr, R2] Na soma 6 porque é a de maior valor e daria mais pontos.

[S13, pós-teste, exp, R2] Porque é um número maior do que 3 e é mais fácil de ganhar.

[S141, pós-teste, contr, R2] Como são dois dados é mais facil obter uma soma alta.

Comparar o número de casos favoráveis

[S75, pré-teste, exp, R2] Se aposta-se na soma 3 tinha só 2 possibilidades, ou saía um 1 e um 2 ou um 2 e um 1, assim na soma 6 tenho mais possibilidades (um 3 e um 3, um 4 e um 2, um 5 e um 1, etc).

[S167, pré-teste, contr, R2] Porque ao mandarmos duas vezes o dado ao ar é muito provável que ao somarmos os pontos obtidos o número seja o 6 que é um número de maior valor absoluto e porque ao somarmos o numeros para obter o nº 3 só se nos tivessem saído o nº 1+o nº 2 enquanto no 6 dava o nº 1+nº 5, o nº 2+nº 4, nº 3+nº 3, o 5+ o 1.

[S193, pré-teste, contr, R2] Porque tem mais hipoteces de ligar mais os n.os.

[S32, pós-teste, exp, R2] [Na soma 3.] 1–2, 2–1; [Na soma 6.] 3–3, 4–2, 2–4, 5–1, 1–5; porque as chances são maiores.

[S116, pós-teste, contr, R2]

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

[S126, pós-teste, contr, R2] Porque existem mais possibilidades nesta soma: 4+2; 3+3; 5+1. E na soma 3 só existe uma possibilidade: 1+2.

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S48, pós-teste, exp, R2] p=(soma 3)=2/36; p=(soma 6)=5/36.

[S130, pós-teste, contr, R2]

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

p(soma 3)=2/36; p(soma 6)=5/36.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S83, pré-teste, exp, R3] Penso que as chances de ganhar são as mesmas pois na soma dos dados tanto pode saír o 3 como o 6.

[S171, pré-teste, contr, R3] Nunca se sabe o que sai ao lançar os dados.

[S104, pós-teste, contr, R3] Acho que as chances de ganhar são iguais porque o nº de probabilidades é igual para as duas somas. Nestes jogos nunca se pode ter a certeza, a $\bar{n}$ ser que estaja viciado.

Questão 5.b)

Comparar as duas somas

[S177, pré-teste, contr, R2] Eu utilizei este raciocínio, pois acho que a soma 5 é a mais alta, ou seja, venceria.

[S37, pré-teste, exp, R3] Ambos os n.os são aproximados é de fácil saida.

[S13, pós-teste, exp, R2] Porque é um número maior do que 4 e é mais fácil de ganhar.

[S147, pós-teste, contr, R3] Acho que as chances são iguais, pois como é só diferença de 1 número, acho que está equilibrado para ambos os lados.

Comparar o número de casos favoráveis

[S88, pré-teste, exp, R2] Porque a soma 4 só tem 3 possibilidades e a soma 5 tem 4 possibilidades.

[S153, pré-teste, contr, R2] Metade de 4 são 2 por isso em cada dado tinha que sair o numero 2 que é um número muito baixo, na soma 5 á mais opções, 4+2; 3+2;

[S49, pré-teste, exp, R3] As chances de ganhar são iguais porque as hipóteses são as mesmas.

[S83, pós-teste, exp, R2]

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

A soma 4 aparece 3 vezes. A soma 5 aparece 4 vezes. Porque a soma 5 aparece 4 vezes.

[S188, pós-teste, contr, R2] Porque há mais numeros a somar para dar 5.

[S77, pós-teste, exp, R3] É igualmente provável porque existem 2 casos possíveis para cada uma das opções (2+2, 3+1; 2+3, 4+1).

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S59, pós-teste, exp, R2]

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	5	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

p(soma 4)=3/36, p(soma 5)=4/36. Existem mais chances de ganhar com a soma 5.

[S129, pós-teste, contr, R2]

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	6	7
2	3	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	6	7	8
3	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	6	7	8	9
4	$\boxed{5}$	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

p(4)=3/36=8,3%; p(5)=4/36=11,1%.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S77, pré-teste, exp, R3] Pode sair um número qualquer.

[S183, pré-teste, contr, R3] Porque nunca se sabe se pode sair um número alto ou baixo.

[S204, pós-teste, contr, R3] Porque pode sair a soma 3 ou a soma de 11.

Questão 5.c)

Comparar as duas somas

[S207, pré-teste, contr, R2] Na soma 11 porque quanto maior melhor para ganhar.

[S1, pré-teste, exp, R3] Porque como o nº 11 é muito próximo de 12 e o nº 3 é muito próximo de 2 é provável que saia tanto um como outro.

[S39, pós-teste, exp, R2] É maior logo é mais provável.

[S156, pós-teste, contr, R2] Pois a soma è maior e como vai até 12 nos dois lançamentos (se um dado sair 6 e outro 6 dá 12) è provável eu ganhar.

Comparar o número de casos favoráveis

[S75, pré-teste, exp, R2] Na soma 3 existem 3 possibilidades e na soma 11 existem muitas mais, pode sair um 1 e um 10, ou um 2 e um 9, etc.

[S68, pré-teste, exp, R3] As hipóteses são as mesmas porque para 11 tem que sair 6+5 e para o 3 é 2+1.

[S151, pré-teste, contr, R3] Há as mesmas combinações na soma 11 e na soma 3.

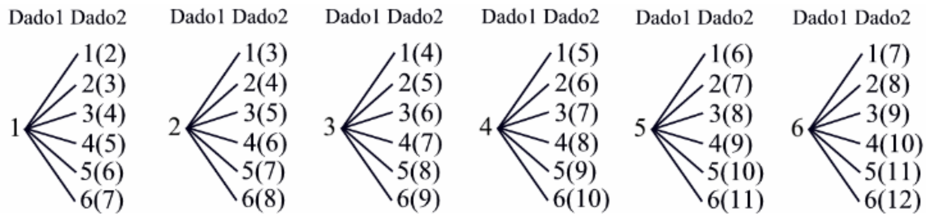
[S188, pós-teste, contr, R2] porque há mais números a somar para dar 11.

[S92, pós-teste, exp, R3] Soma 3 → 2+1; 1+2. Soma 11 → 6+5; 5+6.

[S110, pós-teste, contr, R3] Existe o mesmo nº de formas de chegar à soma 3 e à soma 11 (1+2; 5+6).

Comparar as probabilidades dos acontecimentos

[S28, pós-teste, exp, R3]



p(soma 3)=2/36; p(soma 11)=2/36.

[S138, pós-teste, contr, R3]

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	5	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

p(3)=2/36=0,05=0,5%; p(11)=2/36=0,05=0,5%.

Ambos os acontecimentos são possíveis

[S48, pré-teste, exp, R3] Porque não se sabe o que vai sair.

[S124, pré-teste, contr, R3] Porque os números estão la e as chances de sair um numero ou outro são as mesmas.

[S144, pós-teste, contr, R3] Eu penso que é conforme a sorte do jogador ou estando viciados para algum número.